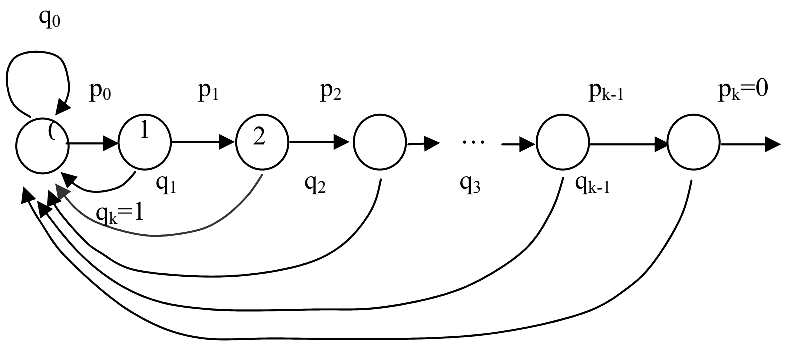
DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 04/05. 2on Q

EXAMEN FINAL. Convocatòria Ordinària.

Cadenes de Markov. (2,5 punts). La següent cadena de Markov modelitza el temps de desenvolupament d'una malaltia no mortal. Cada període es correspon amb una setmana i k=4.



Preneu p_i =1/2 per i = 0,1,2, p_3 =1/3 i respongueu a les següents qüestions:

1. Classes i periodicitat dels estats de la cadena.
2. Triat un individu d'entre els infectats a l'atzar, quina és l'esperança del temps que tardarà en curar-se.?
3. Un individu acaba d'infectar-se de la malaltia. Calculeu quina és l'esperança del temps que tardarà en curar-se. Compareu els resultats obtinguts amb la qüestió anterior i justifiqueu la vostra resposta.
4. Suposeu ara que també p_3 =1/2. Sense efectuar càlculs, raoneu si hi hauria diferència entre els resultats obtinguts en les qüestions 2 i 3 anteriors.

Models de Temps de Vida i Reemplaçaments. (**2 punts**) Un fabricant ven un aparell per funcionar en el desert que conté un sistema de bombeig de combustible el qual està integrat per dues bombes. La segona de les bombes està desconnectada i actua en reserva al produir-se la obstrucció de la primera, de forma que l'aparell pugui continuar funcionant fins produir-se l'obstrucció de la segona, moment en el que haurà de reemplaçar-se el sistema de bombeig complet. El temps de funcionament de la primera bomba és una v.a. exponencial d'esperança 10000 hores i el de la segona és també una v.a. aleatòria exponencial però d'esperança 5000 hores.

Es demana:

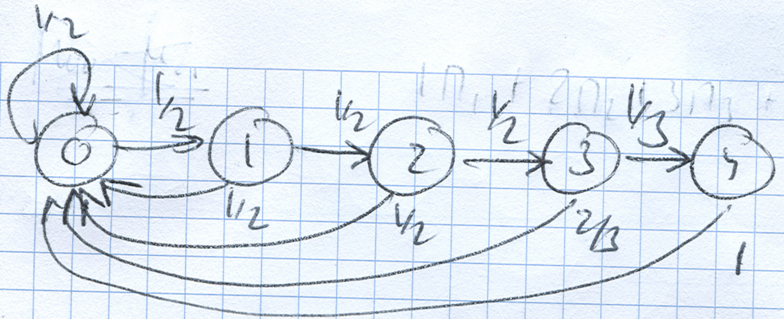
a) Fracció dels aparells que superaran les 5000 hores de funcionament ininterromput.
b) Calculeu el temps mig de funcionament ininterromput d'un aparell.
c) Els costs per una fallida de l'aparell són de 10000 €, mentre que el cost del sistema de bombeig és de 2000 € (inclosa la seva instal.lació). Determineu de forma aproximada quin és el període $0 \leq T^* \leq 5000$ a partir del qual és recomanable la substitució del sistema de bombeig.
d) Per un criteri determinat es decideix reemplaçar el sistema de bombeig quan aquest porta T=5000 hores funcionant. Calculeu en aquestes condicions quin és el nou temps mig de funcionament ininterromput d'un aparell.

DIPLOMATURA D'ESTADÍSTICA. Curs 04/05. 2on Q

EXAMEN FINAL. Convocatòria Ordinària.

Teoria de Cues. (10 punts) Les peticions d'unitats d'un determinat producte efectuades pels clients d'un comerç són satisfetes mitjançant un magatzem que té capacitat per com màxim s=10 unitats. Inicialment el magatzem està ple amb 10 unitats. En ser servida una de les unitats s'envia immediatament per part del magatzem una ordre de reposició de la unitat que s'acaba de vendre. El temps que tarda en arribar la nova unitat ve distribuït segons una llei k-Erlang d'esperança 20 dies amb k=2. El temps mig entre petició i petició d'unitats dels clients és de 2,1 dies amb una desviació de 0,5 dies. Quan arriba una petició per part d'un client de una unitat al magatzem i no pot ser servida per estar el magatzem buit llavors les peticions són retingudes i seran servides per ordre d'arribada. En aquestes condicions es demana:

1. Calculeu fent ús de una aproximació el temps mig que tarda una petició de unitat en ser servida.
2. Calculeu el número mig de peticions que estan sense servir al magatzem.
3. Calculeu la probabilitat de que una petició hagi d'esperar més de 30 dies sense ser servida.
4. Es considera una ampliació per poder disposar fins a 15 unitats. Es planteja el dilema següent:
   a) obrir un nou magatzem amb capacitat 5 unitats al que es desviïn 1/3 del total de les peticions, mentre que l'antic magatzem rebi 2/3 de les peticions, b) ampliar el magatzem de forma que pugui allotjar com màxim 15 unitats. Quina opció és més recomanable per tal de que el temps mig d'espera de les peticions sigui el més baix possible? Respongueu sense calcular les dues configuracions completament i raoneu la resposta.



$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) És una cadena ergòdica
l'única classe que té és aperiòdica

2) El temps de vida restant d'un individu infectat del que no se sap quan ho va fer és el temps de vida residual. La distribució del temps de vida residual ve donada per π_i, $i=1,2,3,4$. L'esperança és per tant: $E = 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4$

També pot obtenir-se segons $\pi_1\mu_{10} + \pi_2\mu_{20} + \pi_3\mu_{30} + \pi_4\mu_{40}$

Càlcul de les π_i:

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{i=0}^{K-1} \prod_{j=0}^{i} p_j\right]^{-1} = \left[1 + p_0 + p_0p_1 + p_0p_1p_2 + p_0p_1p_2p_3\right]$$

$$= \left[1 + 1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^3 1/3\right]^{-1} = 0'5217$$

$$\pi_1 = 1/2\,\pi_0, \quad \pi_2 = (1/2)^2\pi_0, \quad \pi_3 = (1/2)^3\pi_0, \quad \pi_4 = (1/2)^3 1/3\,\pi_0$$

$$\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = 1/2\,\pi_0\left(1 + 2\cdot 1/2 + 3(1/2)^2 + 4(1/2)^2 1/3\right) = \boxed{0'8042}$$

3) es demana μ_{10}

$$\begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \\ \mu_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \\ \mu_{40} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \\ \mu_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\mu_{40} = 1$$

$$\mu_{30} = 1 + 1/3 = 4/3$$

$$\mu_{20} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 4/3 = \frac{10}{6}$$

$$\boxed{\mu_{10} = 1 + \frac{1}{2}\frac{10}{6} = 11/6}$$

Facultat de Matemàtiques i Estadística
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Assignatura:

Estudiant/a:

Data:

Full .... de ....

QUALIFICACIÓ

Respecte de l'apartat 2) anterior observem que:

$\pi_1 \mu_{10} + \pi_2 \mu_{20} + \pi_3 \mu_{30} + \pi_4 \mu_{40} =$

$= p_0 \pi_0 (\mu_{10} + p_1 \mu_{20} + p_1 p_2 \mu_{30} + p_1 p_2 p_3 \mu_{40}) =$

$= \frac{1}{2} \pi_0 \left(\frac{11}{6} + \frac{1}{2} \frac{10}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \right) = 0'80428$

4) si $p_3 = \frac{1}{2}$ llavors augmentaria el temps de permanència en la malaltia i per tant augmentaria μ_{10} i també E.

Es una distribució hipoexponencial

$\lambda_1 = 10^{-4}$, $\lambda_2 = 2\cdot 10^{-4}$

a)

$$F_Z(t) = 1 + \theta_1 e^{-\lambda_1 t} + \theta_2 e^{-\lambda_2 t} \; ; \quad \theta_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = -2$$

$$F_Z(t) = 1 - 2e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} \qquad \theta_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1$$

$$R_Z(t) = 1 - F_Z(t) = 2e^{\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}$$

$$R_Z(5000) = P(Z \geq 5000) = 2e^{-0'5} - e^{-1} = 0'8451$$

b) $$E[Z] = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^{-1} = 10^4(1+1/2) = 15000 \text{ hores}$$

c) $$C(T) = \frac{C_f F_Z(T) + C_R}{\int_0^T R_Z(t)\,dt} = \frac{1'2 - 2e^{-\lambda_1 T} + e^{-\lambda_2 T}}{3/2 + \frac{e^{-\lambda_2 T}}{2} - 2e^{-\lambda_1 T}}$$

$$\int_0^T R_Z(t)\,dt \int_0^T (2e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})\,dt = \frac{2}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 T}) - \frac{1}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 T})$$

$$= \frac{2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 T} - \frac{2}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 T} = 10^4\left(3/2 + \frac{e^{-\lambda_2 T}}{2} - 2e^{-\lambda_1 T}\right)$$

T	1000	2000	3000	4000	5000
C(T)	2'096	1'177	0'9125	0'8036	0'7641

← T^*

d) $$E[Z_T] = \int_0^T R_Z(t)\,dt = 10^4\left(3/2 + \frac{e^{-1}}{2} - 2e^{-1/2}\right) = 4708 \text{ hores.}$$

Cua $G/E_2/10$

$$\lambda = \frac{1}{E[\tau]} = \frac{1}{2'1}\, d^{-1}, \quad \mu = \frac{1}{E[x]} = \frac{1}{20}\, d^{-1}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{21} \simeq 0'9523$$

$$\sigma_\tau = 0'5\, d, \quad \sigma_x = \sqrt{200} = 14'14\, d$$

s'aplica una aproximació "heavy traffic" de Köllerström

1) $$W_q \approx \frac{\lambda(\sigma_\tau^2 + 1/S\, \sigma_x^2)}{2(1-\rho)} = \frac{(1/2)^2 + \frac{200}{10}}{2'1 \cdot 2 \cdot 0'0476} \simeq 101'25 \text{ dies}$$

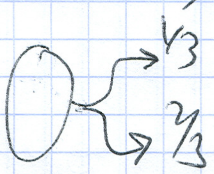
2) $L_q = W_q \cdot \lambda = 48'21$ peticions

3) w_q es distribueix aprox. de forma exponencial

$$P(w_q \geq 30) = e^{-30/W_q} = e^{\frac{-30}{101'2}} \simeq 0'7435$$

4) En el cas a) hi han dos magatzems amb dues cues, en el b) només 1.

Cas a) $\lambda_1 = \frac{1}{3 \cdot 2'1}\, d^{-1}$, $\mu_1 = \frac{1}{20}\, d^{-1}$ $\quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{S_1 \mu_1} = \frac{20}{3 \cdot 2'1 \cdot 5} =$



$\lambda_2 = \frac{2}{3 \cdot 2'1}\, d^{-1}$ $\mu_2 = \frac{1}{20}\, d^{-1}$ $\quad = 0'635$

$\rho_2 = \rho_1 = 0'635$

a igualtat de factors de càrrega sempre serà més avantatjosa l'opció b) ja que només hi ha una única cua.