(3.a) PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA: MÉTODOS

- **INTRODUCCIÓN.**
- **MÉTODO DE BRANCH & BOUND.**

  Conjunto factible y Relajación lineal de un PLE.

  Partición y árbol de exploración. Incumbente.

  Algoritmo básico de B & B.

  Ejemplos.

UPC

INTRODUCCIÓN.

Definición de PLE

$$
\begin{array}{lll}
Min & c^{\top}x & \\
 & Ax = b & \\
(PLE) & x \geq 0 & (A, b, c \text{ con coeficientes enteros}) \\
 & x \in Z^n &
\end{array}
$$

CATEGORIAS DE ALGORITMOS PARA PLE

- **Algoritmos exactos:**
  - Aseguran la obtención de la solució òptima
  - Coste computacional elevado (*exponencial*).
  - ***B&B*** , ***Planos Secantes*** ,...
- **Algoritmos de aproximación:**
  - Solución subóptima con estimación de su calidad.
  - Coste computacional razonable (*polinómico*).
  - *Relajación Lagrangiana* , ...
- **Heurísticas:**
  - Solución subóptima sin estimación de su calidad.
  - Los más rápidos.
  - *Métodes de búsqueda local*, *algoritmos genéticos,...*

ALGORITMO BASICO DE BRANCH & BOUND PARA PROGRAMACION LINEAL ENTERA.

- Conjunto factible de un PLE y Relajación Lineal.
- Concepto de partición.
- Arbol de exploración.
- Cotas de la función objetivo sobre las particiones.
- Algoritmo básico de B & B.
- Ejemplos.

1. Conjunto factible de un PLE y Relajación Lineal.

Consideraremos Problemas de Programación Lineal Entera (PLE) en la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
Min & c^\top x & \\
 & Ax = b & \\
(PLE) & x \geq 0 & \quad (A, b, c \text{ con coeficientes enteros}) \\
 & x \in Z^n &
\end{array}
$$

El conjunto factible G de un PLE puede considerarse como la intersección de un poliedro acotado F:

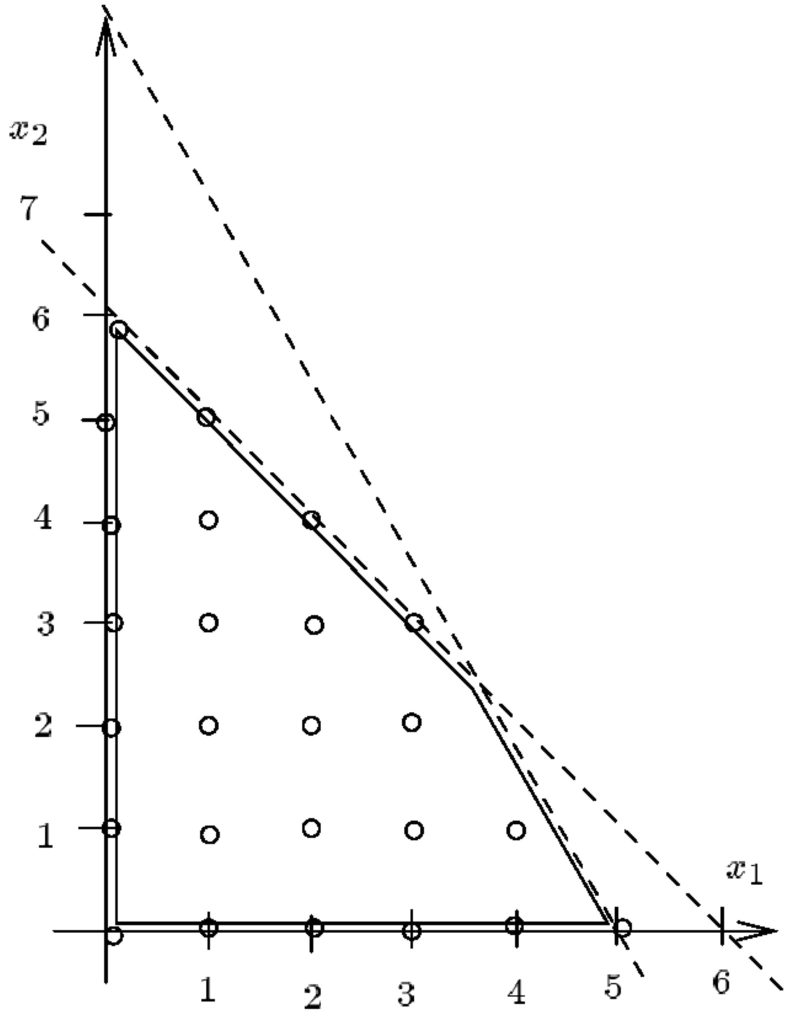
$$F = \{\, x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in G \end{array}} \qquad \boxed{G = F \cap Z^n}$$

Definición de Relajación Lineal. *Dado un problema de PLE:*

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in G \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F \end{array}$$

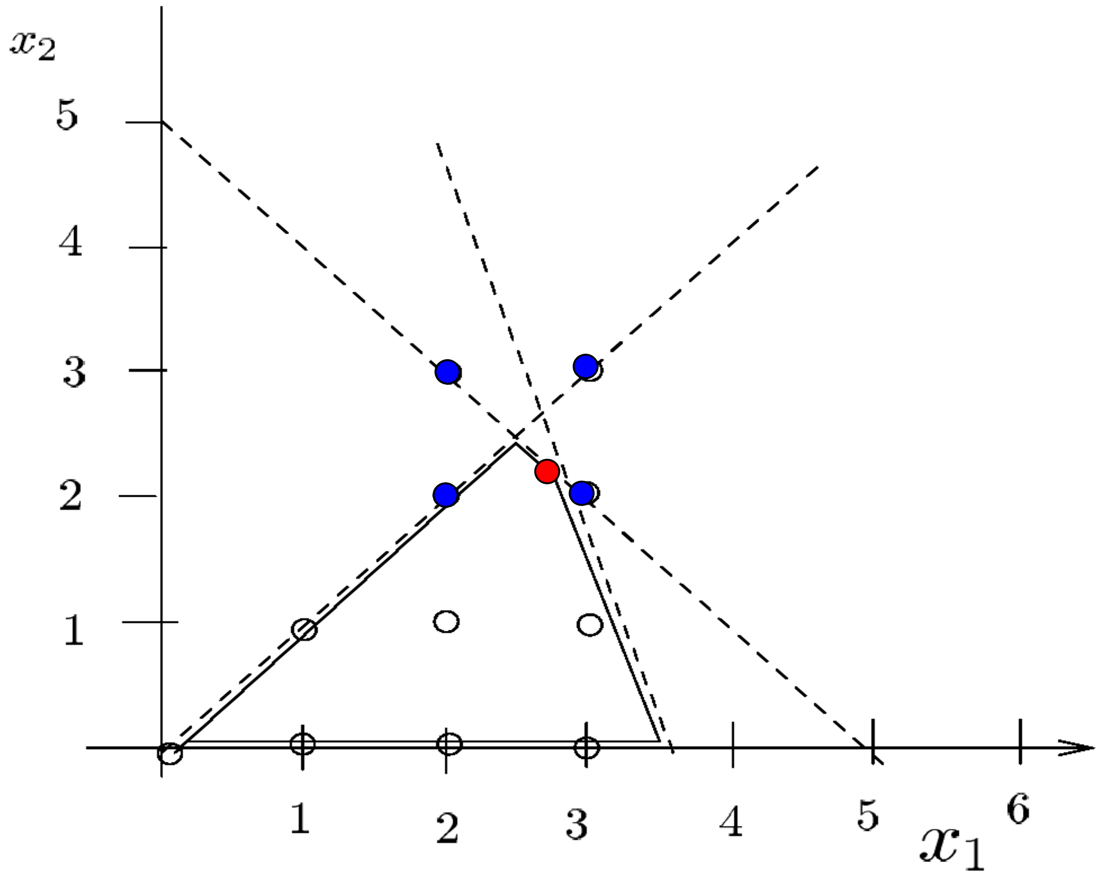
$$\begin{array}{ll} Min & -8x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x \in Z^2 \end{array}$$



La solución de la relajación lineal es el punto $(x_1, x_2) = (11/4, 9/4)$. Las soluciones obtenidas mediante redondeo son:

$$
\begin{array}{cc}
(3,3) & \text{(infactible)} \\
(3,2) & \text{(infactible)} \\
(2,3) & \text{(infactible)} \\
(2,2) & \text{(factible)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Min & 2x_1 + x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 5 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & x \in Z^2
\end{array}
$$



2. Concepto de Partición de un PLE.

Dado el conjunto factible G de un problema de programación lineal entera, entenderemos por *partición* un conjunto $G_1, G_2, \ldots G_m$ de subconjuntos de G en número finito, que verifica:

1. $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_m = G$
2. $G_j \cap G_k = \emptyset, \ \forall j \neq k, \ 1 \leq j, k \leq m.$

Supongamos un PLE y su relajación lineal RL:

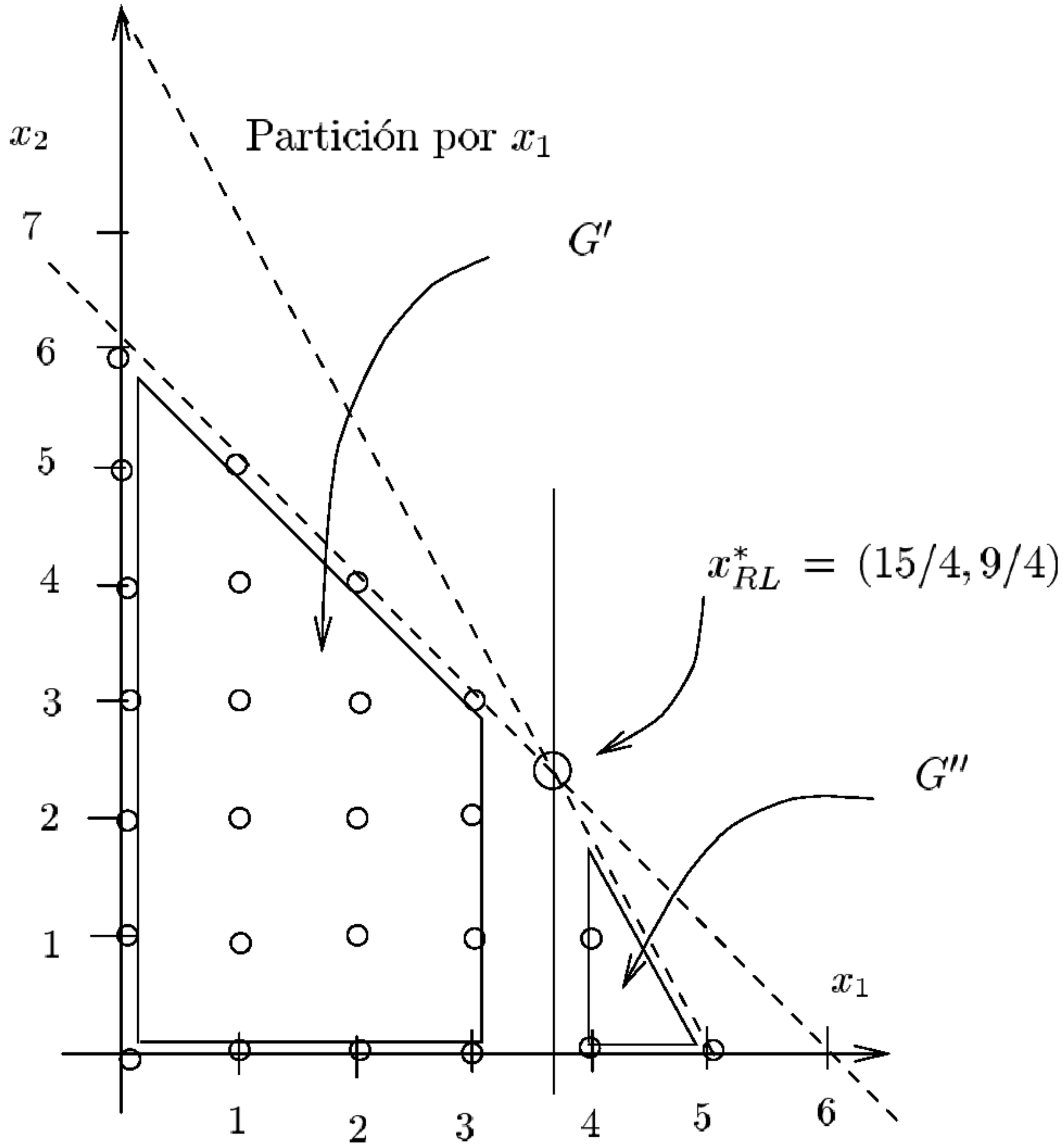
$$(PLE) \quad \begin{array}{lr} Min & c^\top x \\ & x \in F \cap Z^n \end{array} \qquad \Bigg| \qquad (RL) \quad \begin{array}{lr} Min & c^\top x \\ & x \in F \end{array}$$

Designemos por x^*_{PLE} una solución de PLE y por x^*_{RL} a una solución de su relajación

$$\boxed{(x^*_{RL})_\ell \notin Z \qquad \begin{array}{l} G' = G \cap \{\, x \in R^n \mid x_\ell \leq \lfloor (x^*_{RL})_\ell \rfloor \,\} \\[2ex] G'' = G \cap \{\, x \in R^n \mid x_\ell \geq \lceil (x^*_{RL})_\ell \rceil \,\} \end{array}}$$

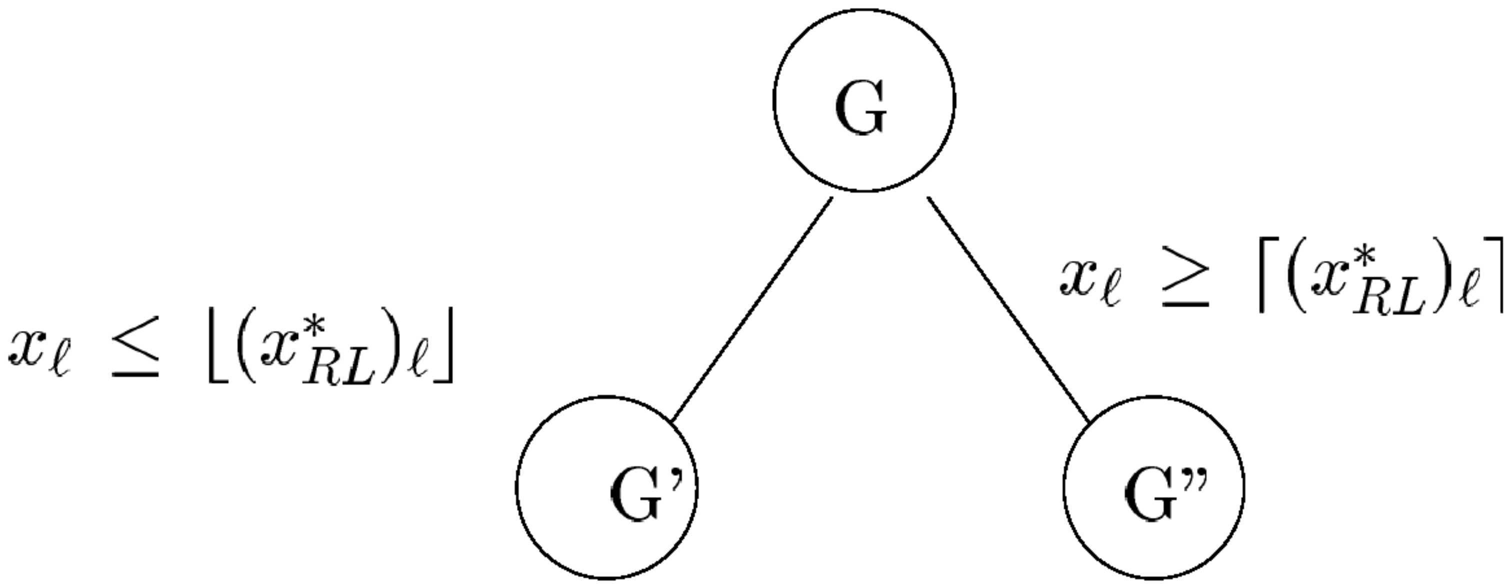
Ejemplo.

$$\begin{array}{ll} Min & -8x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



ÁRBOL DE EXPLORACIÓN

Partición según x_ℓ



3. Propiedades de las particiones de un PLE.

z^*_{PLE} Valor mínimo (óptimo) de la función objetivo para el PLE.
z^*_{RL} Valor mínimo (óptimo) de la función objetivo para la Relajación Lineal.

El conjunto de factible del PLE está contenido dentro del conjunto factible de la relajación RL:

$$G \subseteq F$$

Debido a la anterior inclusión deberá cumplirse:

Propiedad 1.

$$c^\top x^*_{RL} = z^*_{RL} \leq z^*_{PLE} = c^\top x^*_{PLE}$$

El valor mínimo de la función objetivo sobre F (valor óptimo de la relajación lineal) es una cota inferior del valor óptimo del PLE.

Para cada una de las particiones G', G'' también se cumple:

$$G' \subseteq G, \;\; G'' \subseteq G$$

Para cada uno de los problemas originados por la partición G', G'':

$$(PLE') \quad \begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in G' \end{array} \quad \Bigg| \quad (PLE'') \quad \begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in G'' \end{array}$$

deberá cumplirse:

Propiedad 2.

$$c^\top x^*_{PLE} = z^*_{PLE} \leq z^*_{PLE'} = c^\top x^*_{PLE'}$$

$$c^\top x^*_{PLE} = z^*_{PLE} \leq z^*_{PLE''} = c^\top x^*_{PLE''}$$

El valor mínimo de la función objetivo sobre G es una cota inferior del valor mínimo de la función objetivo sobre las particiones de G.

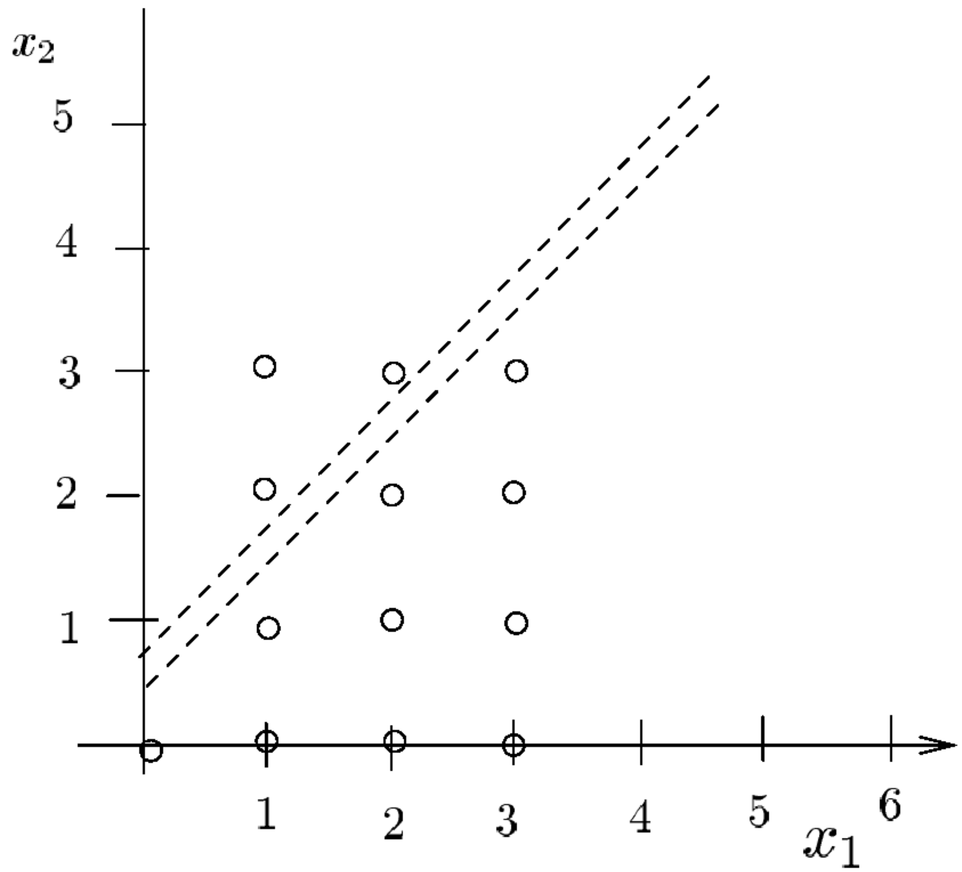
Dado que el número de variables es finito, el número de veces qu una partición puede contener igual número de soluciones enteras es finito.

Puesto que el poliedro es acotado podrá contener un número finito de particiones efectuadas mediante el algoritmo por lo cual el algorimo debe terminar en un número finito de iteraciones.

En caso de que el poliedro no sea acotado hay casos en los que el algoritmo propuesto no determina una solución del problema PLE

$$Min \quad 2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 &\geq 1 \\ 3x_2 - 3x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \quad x \in Z^2 \end{aligned}$$



Algoritmo $B\&B$ para el problema PLE

0) **Inicialización.**

- Situar PLE en la raíz de $\mathcal{T}$.
- Incumbente $z_0 \leftarrow \infty$.

1) **Mientras** $(\mathcal{T} \neq \emptyset)$:

- Seleccionar un $(\mathrm{PLE})_\ell$ no marcado.
  Sea G su conjunto factible.
- Resolver su relajación $(\mathrm{RL})_\ell$.
  Sea $x^*_{RL\ell}$ una solución de ésta.

Si *(* $(\mathrm{RL})_\ell$ infactible ó $\lceil z^*_{RL\ell} \rceil \geq z_0$ *)* **entonces** marcar la hoja ℓ.

Si *(* $x^*_{RL\ell} \in Z^n$ & $(\mathrm{PLE})_\ell$ no marcado *)* **entonces**

Si *(* $z^*_{RL\ell} < z_0$ *)* **entonces**

$x^*_{PLE} \leftarrow x^*_{RL\ell}$ (candidato al óptimo)

$z_0 \leftarrow z^*_{RLj}$

Fin si

- Marcar $(\mathrm{PLE})_\ell$

Fin si

Si *(* $(\mathrm{PLE})_\ell$ no marcado *)* **entonces**

- Tomar $(x^*_{RL\ell})_j = \omega \notin Z$.
- Efectuar una partición de $G = G' \cup G''$
  (Añadir la restricción $x_j \leq \lfloor \omega \rfloor$ para formar un nodo sucesor del ℓ y la $x_j \geq \lceil \omega \rceil$ para formar el otro nodo sucesor.)

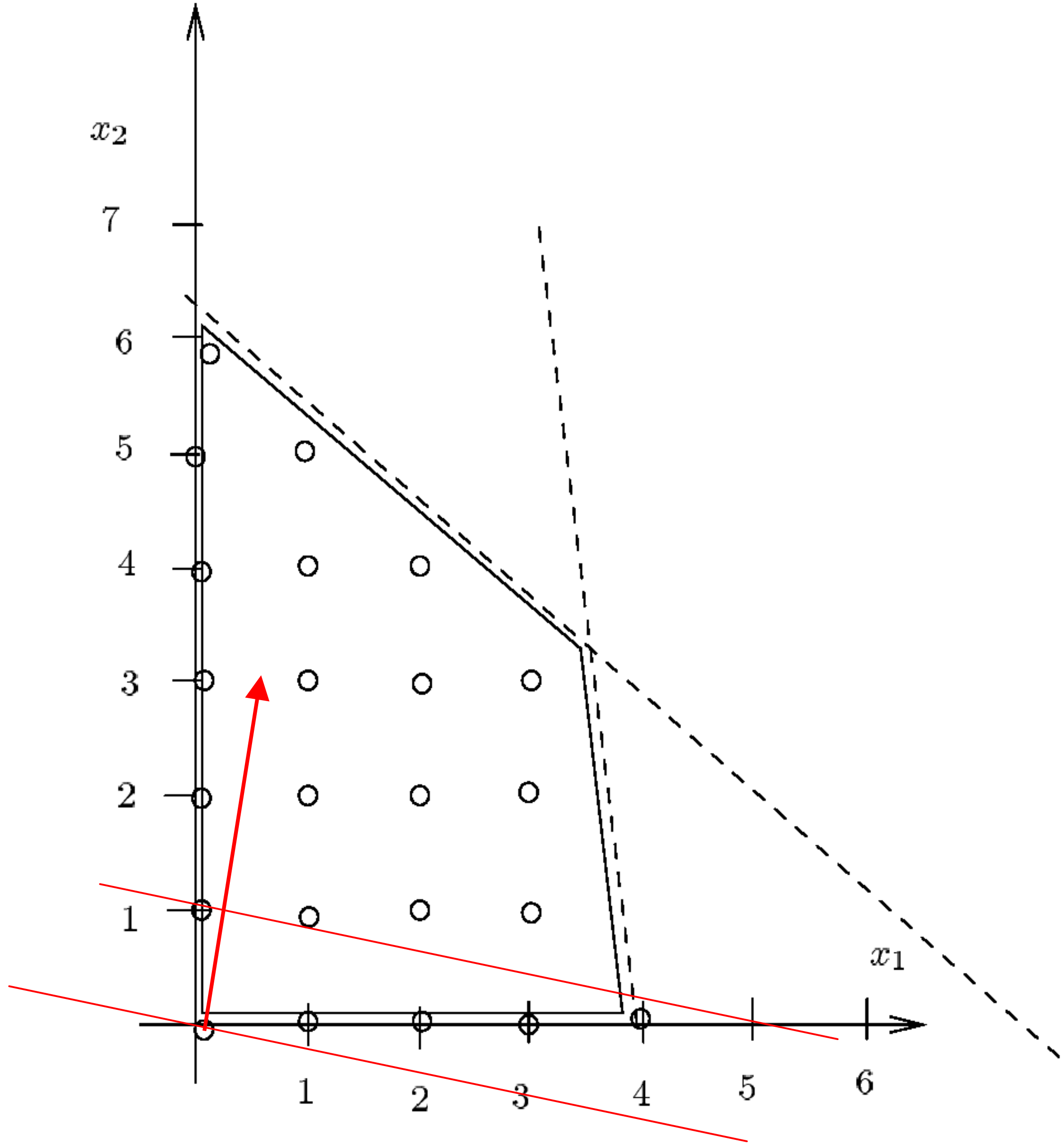
Fin si

Fin Mientras

3) Solución: x^*_{PLE}

Ejemplo.

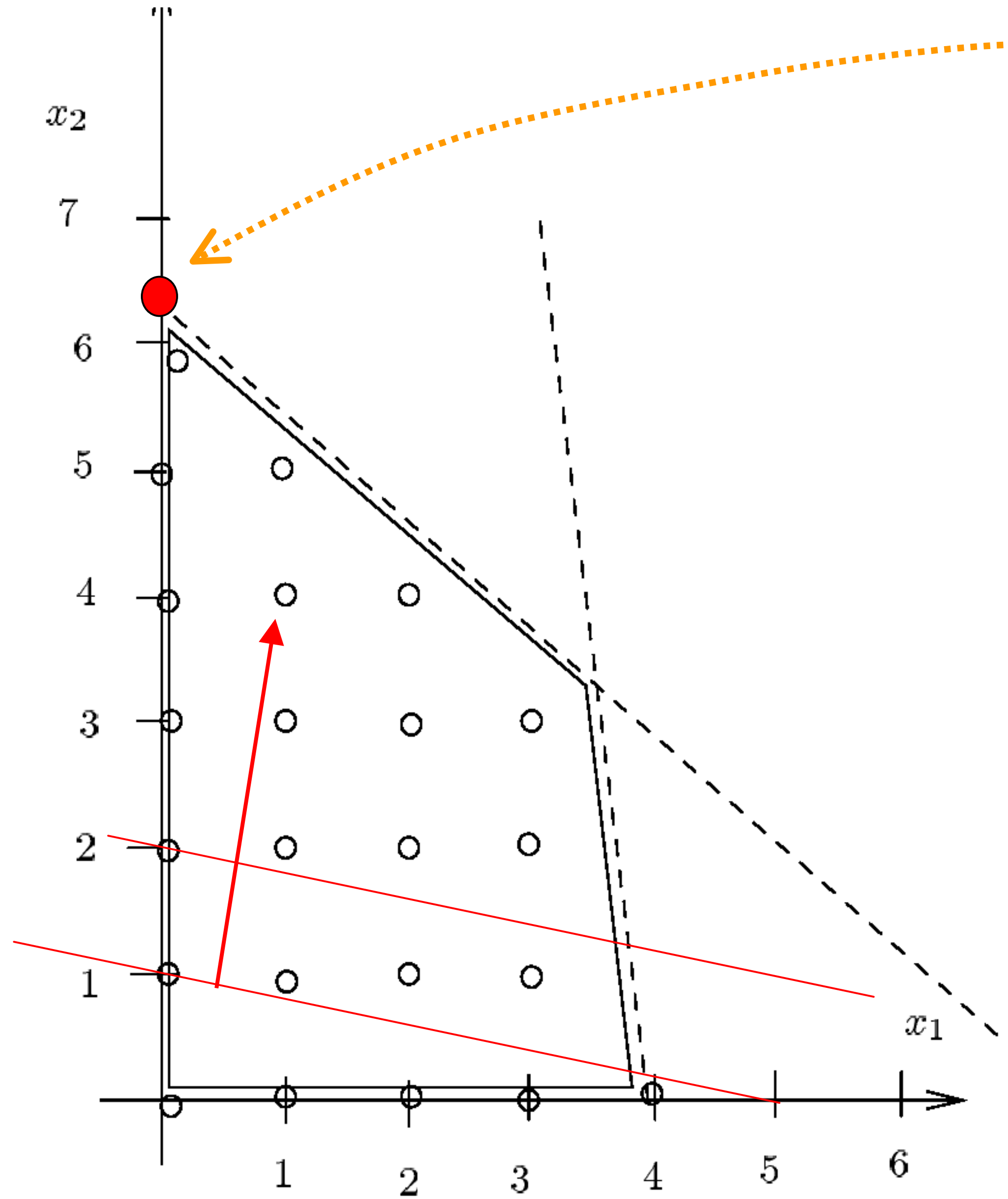
$$\begin{array}{ll} Min & -x_1 - 5x_2 \\ & 6x_1 + 7x_2 \leq 44 \quad R1 \\ & 9x_1 + x_2 \leq 36 \quad R2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x \in Z^2 \end{array}$$



$(x_3, x_4$ holguras de $R1, R2$ respectivamente$)$

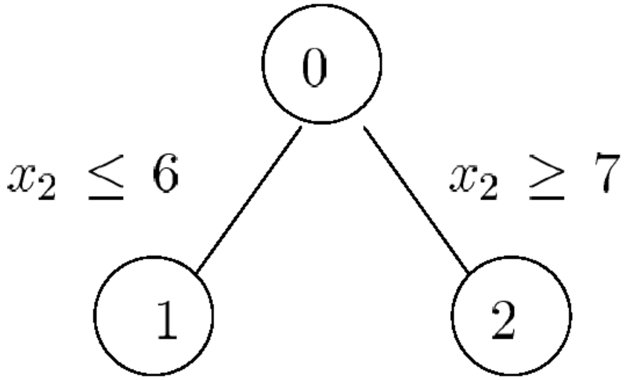
- Inicialización. Incumbente $z_0 \leftarrow \infty$.

- Solución de la relajación lineal del PLE: $x^*_{RL} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, \dfrac{44}{7}, 36, \dfrac{208}{7})$



Nodo 0

Partición según x_2



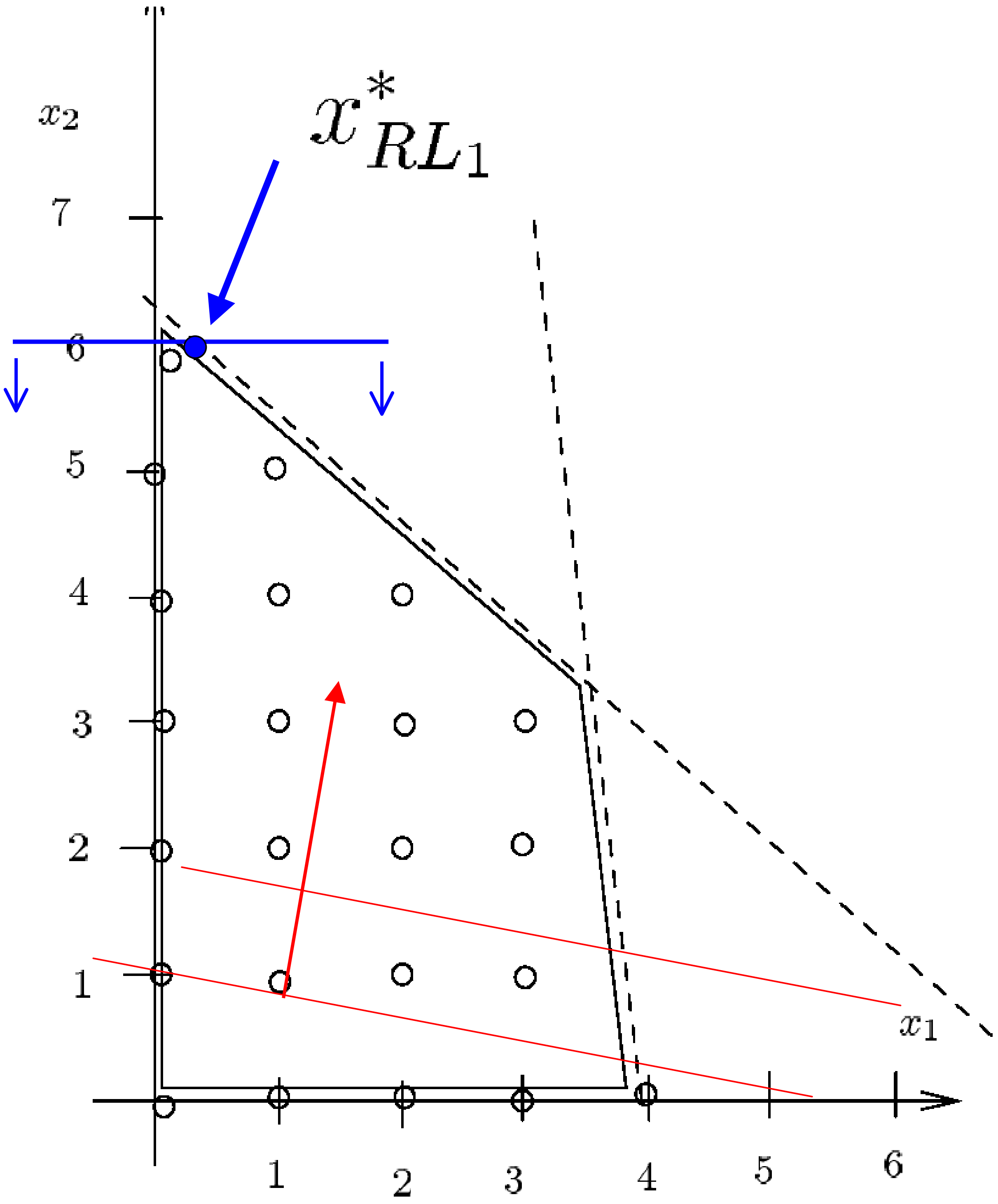
- Se elige el nodo 1 de entre los no marcados.

- **Solución de la relajación lineal.** Solución del Nodo 1 (restricción $x_2 \leq 6$ de holgura x_5):

$$x^*_{RL_1} = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4, x^*_5) = \left(\frac{1}{3}, 6, 27, \frac{162}{6}, 0 \right)$$

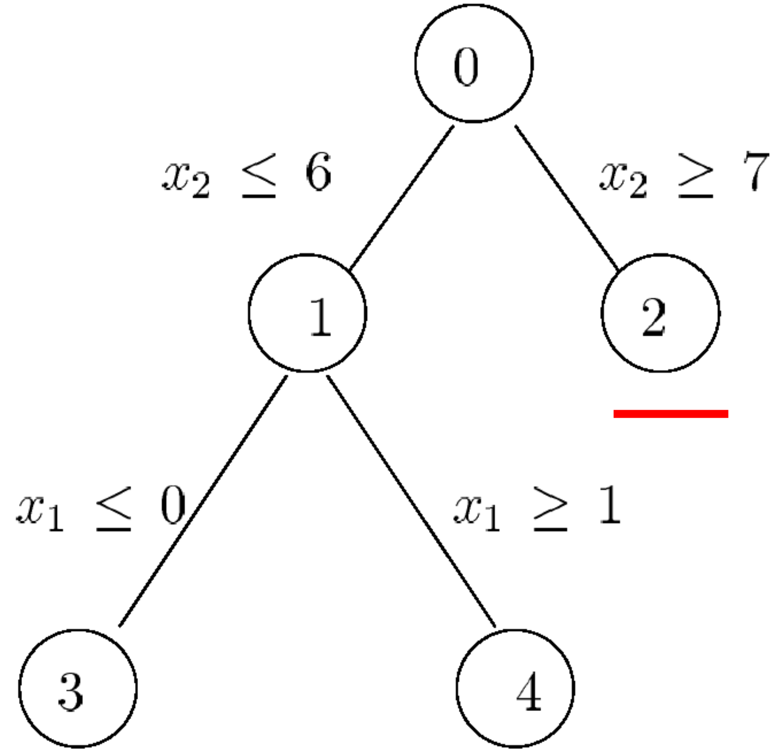
$$\begin{aligned} Min \quad & -x_1 - 5x_2 \\ & 6x_1 + 7x_2 \leq 44 \\ & 9x_1 + x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Nodo 1



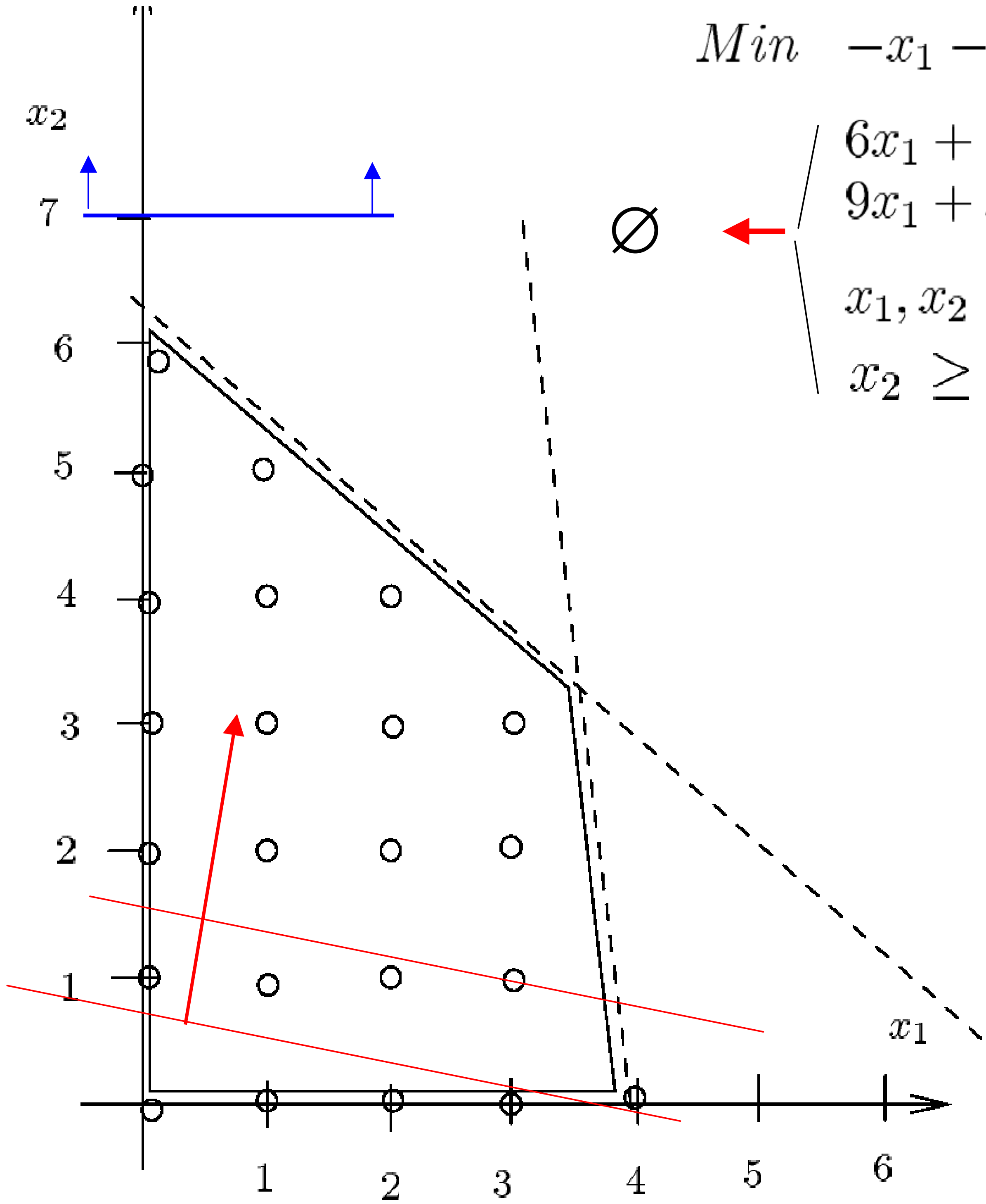
- Se elige componente no entera de la solución $x^*_{RL_1}$, por ejemplo, la x_1

Partición según x_1



- Se elige el nodo 2 de entre los no marcados.

- Solución de la relajación lineal. Solución del Nodo 2 (restricción $x_2 \geq 7$ variable de exceso x_6): Problema infactible ya que todos los puntos de la región factible verifican $x_2 < 7$. **Se marca el nodo 2.**



$$\text{Min} \quad -x_1 - 5x_2$$

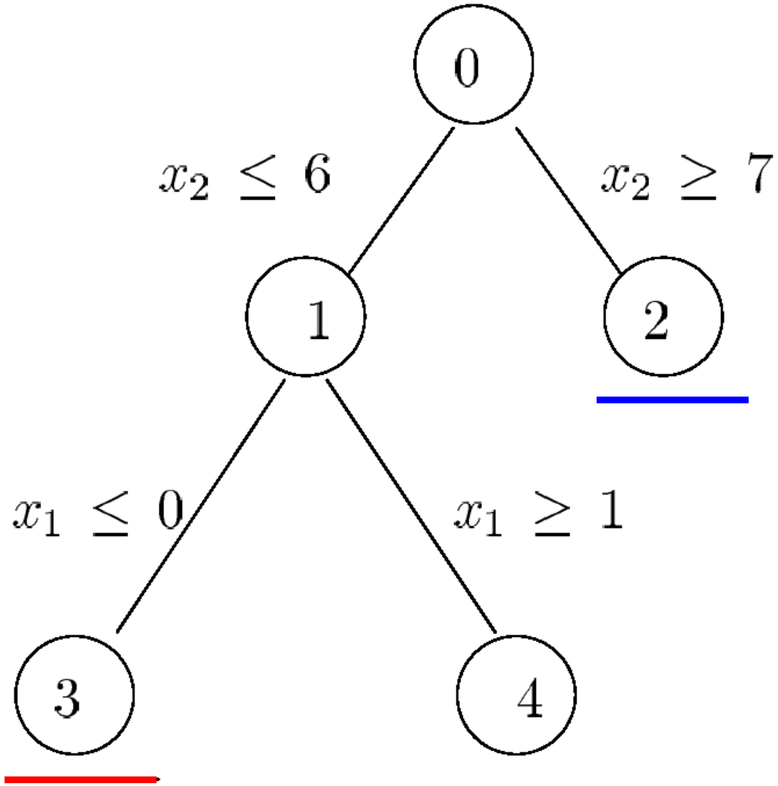
$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\leq 44 \\ 9x_1 + x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 7 \end{aligned}$$

Nodo 2

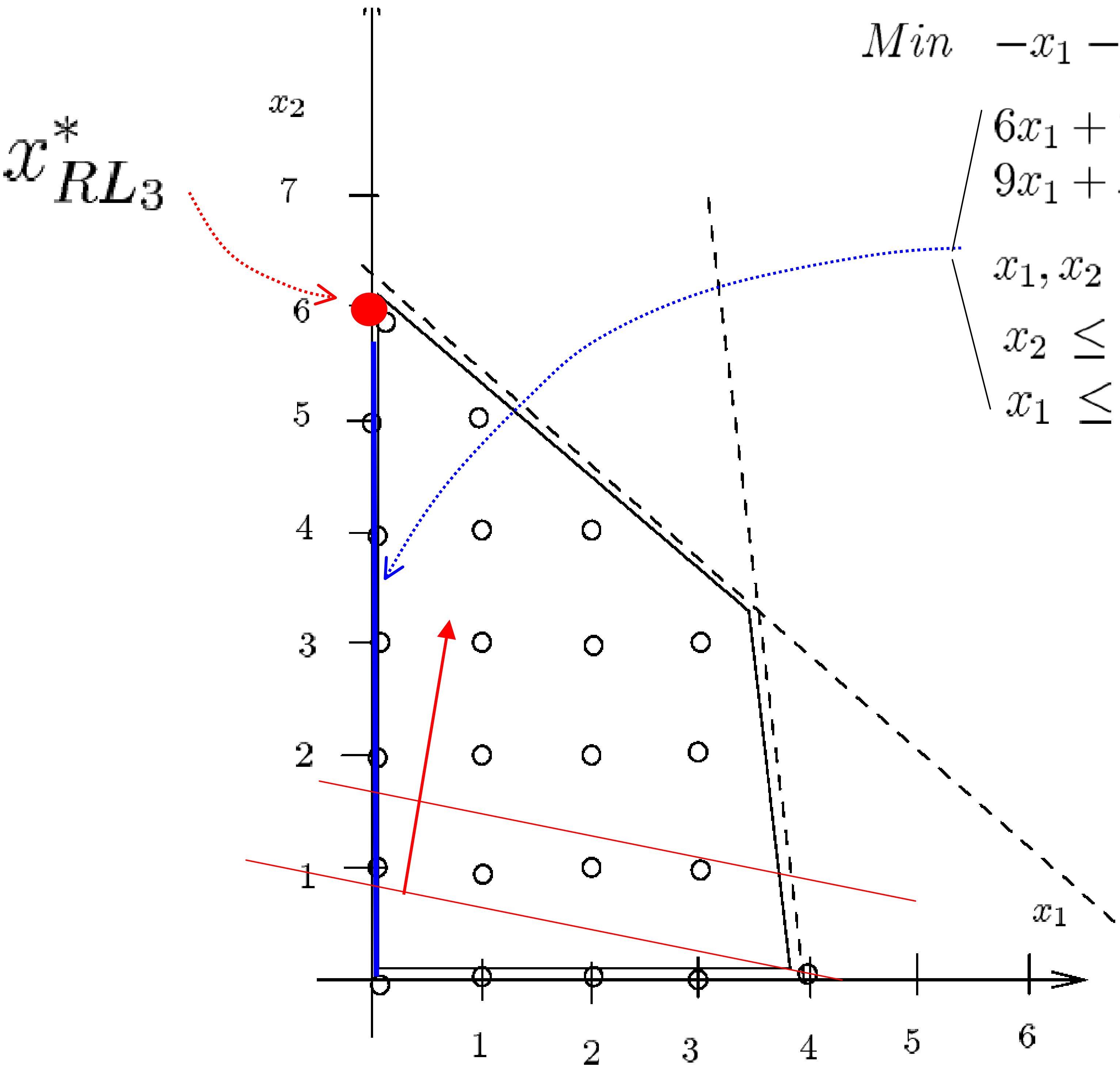
- **Solución de la relajación lineal.** Solución del Nodo 3 (restricción $x_1 \leq 0$ variable de exceso x_7):

$$x^*_{RL_3} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_7^*) = (0, 6, 2, 30, 0, 0)$$

- Solución entera. Se actualiza la incumbente: $z_0 = -30$. Se marca el nodo 3.



$x^* \in Z^6,\ z_0 = -30$



$$Min \quad -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\leq 44 \\ 9x_1 + x_2 &\leq 36 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Nodo 3

Se elige el nodo 4 de entre los no marcados (único que queda).

Solución de la relajación lineal.

$$x^*_{RL_4} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_8^*) = \left(1, \frac{38}{7}, 0, \frac{151}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$$

$$- \lceil (z^*_{RL})_4 \rceil = -28 > z_0 = -30$$

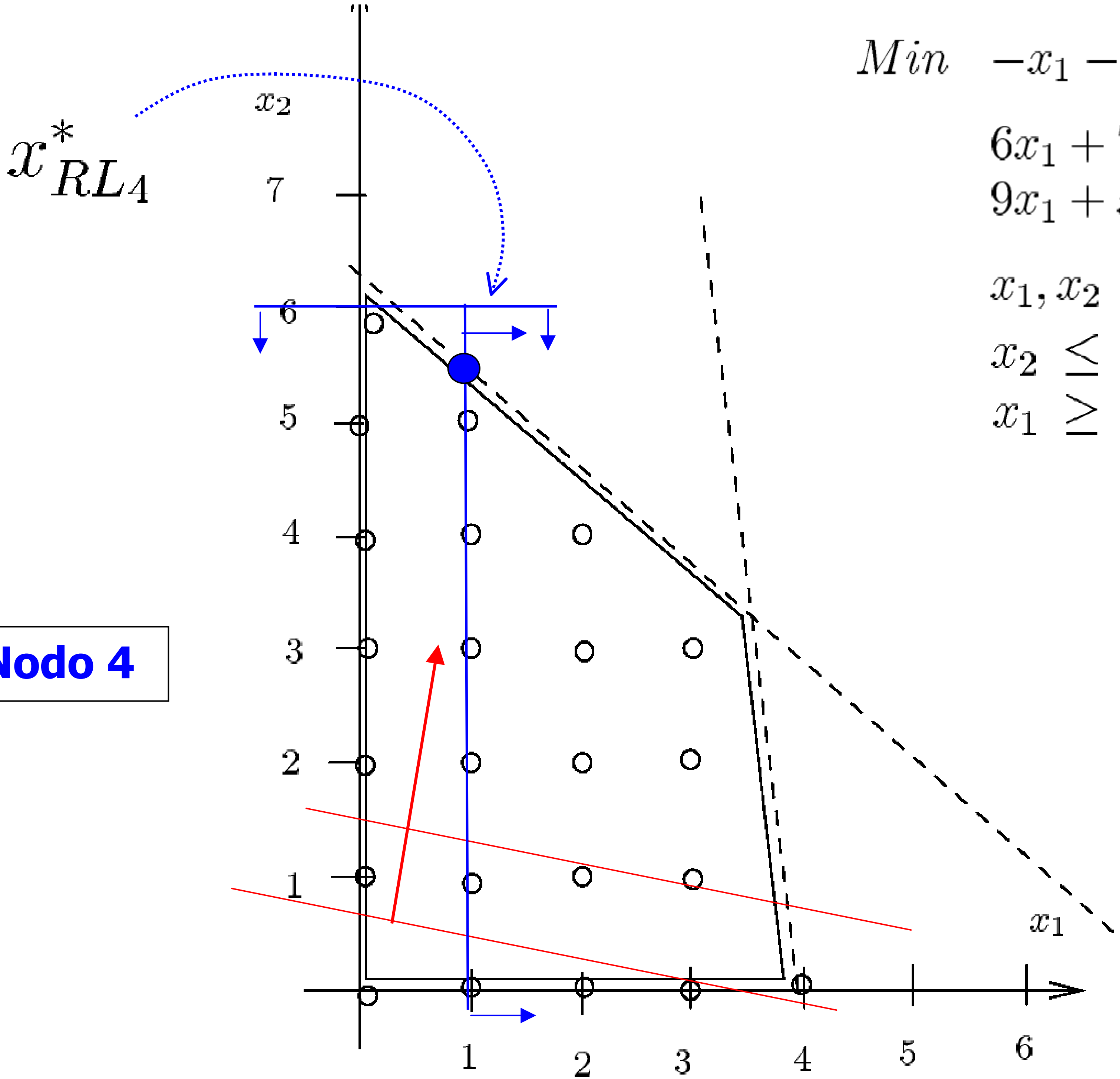
$\boxed{\text{No es necesario explorar ramificaciones del nodo 4.}}$

El árbol de exploración está cerrado.

$$\boxed{x^*_{PLE} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, 6, 2, 30), \quad z^*_{PLE} = -30}$$

Nodo 3

Nodo 4



$$Min \quad -x_1 - 5x_2$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 44$$
$$9x_1 + x_2 \leq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 1$$

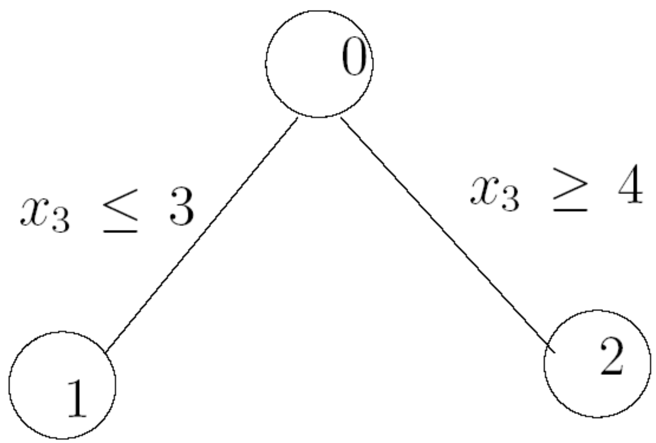
SESIÓN DE PROBLEMAS

$$
(PLE)\quad
\begin{array}{llll}
Min & -x_1 - x_2 - x_3 & & \\
s.a: & 3x_2 + 12x_3 & \leq 139 & R2 \\
 & 5x_1 + \quad +5x_3 & \leq 150 & R3 \\
 & 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 & \leq 130 & R4 \\
 & x_1 & \leq 30 & R5 \\
 & x_i \geq 0, \; x_i \in Z, & (i = 1, \ldots 3) & NN
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Min & c^\top x \\
 & x \in F_0 \cap Z^3
\end{array}
$$

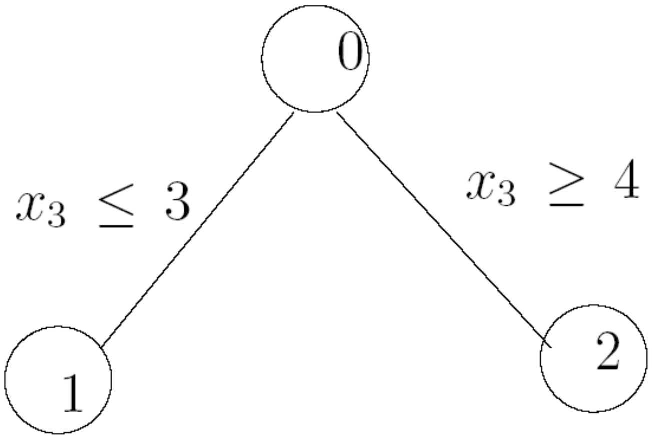
$$F_0 \triangleq \{ x \in R^3 \mid x \; verifica \; R2, R3, R4, R5, NN \}$$

$$
\begin{array}{ll}
Min & c^\top x \\
 & x \in F_0
\end{array}
$$



$$F_1 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \leq 3 \}$$

$$F_2 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \geq 4 \}$$



$$F_1 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \leq 3\}$$

$$F_2 \triangleq F_0 \cap \{ x \in R^3 \mid x_3 \geq 4\}$$

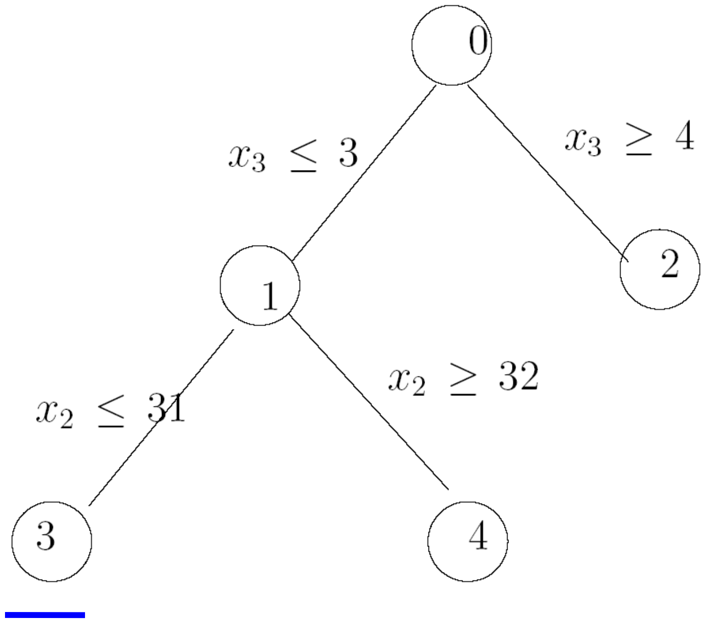
$$Min \quad c^\top x$$

$$x \in F_1$$

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
0	0	0	1	4/10	−1	0	−20	9
1	0	0	0	1/5	0	0	−1	27
0	1	0	0	−4/30	1/3	0	8/3	94/3
0	0	0	0	−1/5	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	3
0	0	0	0	1/15	1/3	0	8/3	184/3

$$F_3 \triangleq F_1 \cap \{ x \in R^3 \mid x_2 \leq 31\}$$

$$F_4 \triangleq F_1 \cap \{ x \in R^3 \mid x_2 \geq 32\}$$



$$x_2 \leq 31 \qquad Min \quad c^\top x$$
$$x \in F_3$$

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	$4/10$	-1	0	-20	0	9
1	0	0	0	$1/5$	0	0	-1	0	27
0	1	0	0	$-4/30$	$1/3$	0	$8/3$	0	$94/3$
0	0	0	0	$-1/5$	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	1	0	0	0	0	0	0	1	31
0	0	0	0	$1/15$	$1/3$	0	$8/3$	0	$184/3$

1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	$4/10$	-1	0	-20	0	9
1	0	0	0	$1/5$	0	0	-1	0	27
0	1	0	0	$-4/30$	$1/3$	0	$8/3$	0	$94/3$
0	0	0	0	$-1/5$	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	$4/30$	$-1/3$	0	$-8/3$	1	$-1/3$
0	0	0	0	$1/15$	$1/3$	0	$8/3$	0	$184/3$

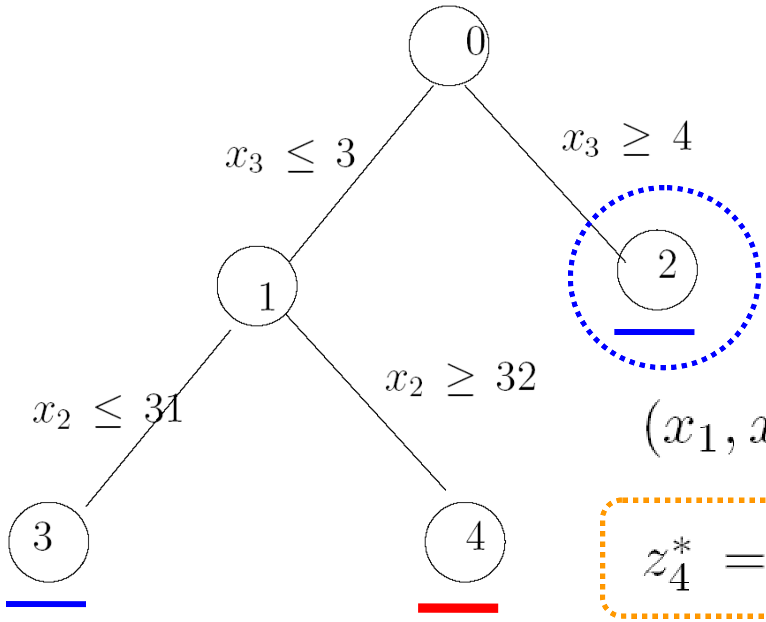
1	2	3	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
0	0	0	1	0	0	0	-12	-3	10
1	0	0	0	$1/5$	0	0	-1	0	27
0	1	0	0	0	0	0	0	1	31
0	0	0	0	$-1/5$	0	1	1	0	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	$-4/10$	1	0	8	-3	1
0	0	0	0	$1/5$	0	0	0	1	61

$$z_3^* = -61. \longrightarrow z_0 = -61$$

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) = \left(26, \frac{91}{3}, 4, 0, 0, 11, 4, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$\lceil z_2^* \rceil = \lceil -181/3 \rceil = -60 > z_0 = -61$$

Nudo 2



Nudo 4

$$\begin{array}{ll} Min & c^\top x \\ & x \in F_4 \end{array}$$

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) = (26, 32, 3, 7, 5, 0, 4, 0, 0)$$

$$\boxed{z_4^* = -61 = z_0 = -61}$$

Soluciones:

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5) = (26, 32, 3, 7, 5, 0, 4)$$

$$(x_1, x_2, x_3, s_2, s_3, s_4, s_5) = (27, 31, 3, 10, 0, 1, 3)$$

Nudo 4

Nudo 2