

**Optimització de Fluxos No Lineals  
en Xarxes amb Constriccions a Banda.**

**Aplicació a Models Acoblats  
de Coordinació Hidro–Tèrmica  
a Curt Termini.**

F. Javier Heredia Cervera.

**Tesi Doctoral**

**Optimització de Fluxos No Lineals  
en Xarxes amb Constriccions a Banda.**

**Aplicació a Models Acoblats  
de Coordinació Hidro–Tèrmica  
a Curt Termini.**

**Autor :** F. Javier Heredia Cervera.

**Director :** Prof. Narcís Nabona i Francisco.

Departament d'Estadística i Investigació Operativa  
Secció d'Informàtica  
Facultat d'Informàtica de Barcelona  
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, maig de 1995

*A mis padres, Manuel y Vicenta*

*En memoria de mis abuelos, Francisco y Francisca.*

## AGRAÏMENTS

Voldria començar agraint a la secció d'Informàtica del Departament d'Estadística i Investigació Operativa de la Universitat Politècnica de Catalunya haver proporcionat el marc adequat per a la realització d'aquesta tesi doctoral. Voldria agrair a la professora M. Pilar Muñoz el seu suport en l'estudi dels resultats computacionals presentats.

Gran part de les idees contingudes a aquesta tesi són fruit del treball en equip dins del grup de recerca d'optimització no lineal continua iniciat pel professor Narcís Nabona, el director d'aquesta tesi. A ell li dec, no només el fet d'haver-se prestat a dirigir aquesta tesi, sinó, sobretot, la meva formació dins del camp de l'optimització. El professor Narcís Nabona és el responsable de molts dels conceptes nous presentats a aquesta tesi, i l'autor de les rutines LEXA incorporades al codi NOXCB 9.0. Una persona fonamental en el desenvolupament d'aquesta tesi ha estat el meu company en Jordi Castro, possiblement qui millor pot entendre l'agonia que ha representat l'elaboració del codi NOXCB 9.0. Part de les idees incorporades a aquest paquet provenen de les llargues converses mantingudes amb ell, així com certes rutines. La resolució dels models acoblats de Planificació Hidro-Tèrmica amb el paquet MINOS 5.3 ha estat portada a terme per l'alumne de doctorat Alex Chiva, al qual també manifesto el meu agraiment. Voldria també recordar al Josep Maria Verdejo, qui em va ajudar en els inicis del projecte de tesi.

A part de les persones que m'han donat suport directament durant tots aquests anys, voldria recordar també a d'altres que, sense saber-ho, han contribuït a alleugerir la tensió del treball continuat : Claudio Monteverdi, Cecilia Bartoli, Peter Gabriel i la tripulació de l'Enterprise, amb qui, cada nit de l'estiu del 93, vaig anar a fer un tomb per l'última frontera.

He volgut deixar pel final el meu agraiment més íntim, el que dedico a la Núria, la meva dona. Dins d'aquesta tesi hi ha soterrat gran part del nostre temps comú dels darrers anys. Tot el treball que s'exposarà a continuació no hauria estat possible sense la seva generositat. Gràcies Núria.

Barcelona, maig de 1995

## Índex de continguts

### Índexs

Índex d'algorismes

Índex de taules

Índex de figures

<b>1. Introducció.</b>	1
1.1. Presentació.	1
1.2. Primera part : Fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda.	2
1.2.1. Objectius.	2
1.2.2. Desenvolupament.	2
1.3. Segona part : Model Acoblat de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini.	4
1.3.1. Objectius.	4
1.3.2. Desenvolupament.	4
1.4. Aportacions principals.	5

### **PRIMERA PART:**

#### **Optimització de Fluxos No Lineals en Xarxes amb Constriccions a Banda.**

<b>2. Formulació i antecedents (I).</b>	7
2.1. Formulació.	7
2.2. Fluxos Lineals amb Constriccions a Banda Lineals ( <b>FLCL</b> )	8
2.3. Fluxos no lineals ( <b>FN</b> ).	12
2.4. Fluxos No Lineals amb Constriccions a Banda Lineals ( <b>FNCL</b> )	14
<b>3. Fonaments de l'algorisme de resolució del problema (FNCL).</b>	15
3.1. Optimització no lineal amb constriccions lineals. Problema ( <b>FNCL</b> )	16
3.1.1. Partició de les variables.	16
3.1.2. Matriu de constriccions actives.	18
3.1.3. Càlcul de direccions de cerca : subproblema a l'espai nul de $\bar{M}$ .	19
3.1.4. Condicions d'optimalitat de ( <b>NCL</b> )	20
3.1.5. Algorisme del Conjunt de Constriccions Actives.	22
3.2. Fluxos lineals en xarxes amb constriccions a banda. Problema ( <b>FLCL</b> )	23

## Índex de continguts (continuació)

3.2.1. Resolució de sistemes lineals amb la matriu $B$ . . . . .	24
3.2.2. Actualització de la inversa de la base de treball. . . . .	27
3.2.3. Actualització de la inversa de $M_B$ . . . . .	29
3.3. Referències. . . . .	30
<b>4. Explotació de l'estructura del problema (FNCL). . . . .</b>	<b>31</b>
4.1. Estructura del problema (FNCL) . . . . .	31
4.1.1. Estructura de les matrius $S$ i $N$ . . . . .	32
4.1.2. Estructura de la matriu $B$ . . . . .	33
4.2. Algorismes especialitzats de càlcul matricial. . . . .	34
4.2.1. Cost computacional i precisió. . . . .	34
4.2.2. Cicles no clau i superbàsics. . . . .	36
4.2.3. Operacions amb $B$ . . . . .	39
4.2.3.1. Resolució de $Bw = v$ . . . . .	39
4.2.3.2. Resolució de $w'B = v'$ . . . . .	42
4.2.4. Operacions amb $Z$ . . . . .	44
4.2.4.1. Producte $w = Zv$ . . . . .	45
4.2.4.2. Producte $w = Z'v$ . . . . .	49
4.2.5. Representació explícita de cicles i precisió numèrica. . . . .	51
4.2.6. Conclusions. . . . .	55
4.3. Resolució de sistemes d'equacions amb la base de treball. . . . .	56
4.3.1. Forma en Producte de la Inversa (FPI). . . . .	57
4.3.2. Algorisme de Hellerman i Rarick. . . . .	58
4.3.3. Etes d'inversió de $L_i$ . . . . .	59
4.3.4. Etes d'inversió de $B_i$ . . . . .	60
4.3.5. Pivotació parcial. . . . .	63
4.4. Actualització dels cicles $\overset{\circ}{C}$ i $\overset{\circ}{S}$ . . . . .	64
<b>5. Implementació de l'algorisme de resolució del problema (FNCL). . . . .</b>	<b>67</b>
5.1. Càlcul de solucions factibles inicials. . . . .	67
5.2. Optimització al subespai nul de les constriccions actives. . . . .	69
5.2.1. ELB : Exploració Lineal de Bertsekas. . . . .	70
5.2.2. Càlcul de la direcció de descens a $SN\bar{M}$ . . . . .	72

## Índex de continguts (continuació)

5.2.2.1.	Mètode de Newton Truncat (MNT). . . . .	73
5.2.2.2.	Mètode quasi-Newton (MQN). . . . .	76
5.2.2.3.	Comparació MNT i MQN. . . . .	82
5.2.3.	Identificació d'òptims de $(\mathbf{SNM})$ . . . . .	83
5.3.	Identificació d'òptims de $(\mathbf{FNCL})$ . . . . .	87
5.3.1.	Taxació. . . . .	87
5.3.2.	Bloquejos. . . . .	89
5.3.3.	Procés d'identificació d'òptims de $(\mathbf{FNCL})$ . . . . .	90
5.4.	Conjunt màxim de folgues bàsiques. . . . .	93
<b>6.</b>	<b>Resultats computacionals (I).</b> . . . . .	<b>95</b>
6.1.	Descripció del paquet NOXCB 9.0. . . . .	95
6.1.1.	Composició del paquet. . . . .	96
6.1.2.	Ús del paquet NOXCB 9.0. . . . .	97
6.1.3.	Opcions algorísmiques implementades a NOXCB 9.0. . . . .	98
6.2.	Descripció de la col·lecció de problemes EIO/UPC. . . . .	100
6.2.1.	Problemes DIMACS. . . . .	101
6.2.1.1.	Di2no : generador aleatori de constriccions a banda. . . . .	102
6.2.1.2.	Models Rmfgn. . . . .	104
6.2.1.3.	Models Gridgen. . . . .	104
6.2.1.4.	Models Grid-on-Torus. . . . .	106
6.2.1.5.	Models amb funció objectiu Namur. . . . .	108
6.2.1.6.	Models amb funció objectiu EIO1. . . . .	108
6.2.2.	Problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica. . . . .	109
6.2.2.1.	Models d'Optimització Hidrotèrmica. . . . .	109
6.2.2.2.	Model de Planificació Hidro-Tèrmica. . . . .	110
6.3.	Resultats Computacionals. . . . .	112
6.3.1.	Resultats generals. . . . .	113
6.3.1.1.	Resultats segons fases. . . . .	115
6.3.1.2.	Resultats segons models i funcions objectiu. . . . .	117
6.3.2.	Característiques del problema i eficiència. . . . .	118
6.3.2.1.	Nombre de constriccions a banda. . . . .	119

## Índex de continguts (continuació)

6.3.2.2.	Nombre de constriccions a banda actives a l'òptim. ....	120
6.3.2.3.	Estructura de les constriccions a banda. ....	122
6.3.2.4.	Nombre de superbàsiques. ....	123
6.3.3.	Variants algorísmiques i eficiència. ....	125
6.3.3.1.	Exploració lineal de Bertsekas. ....	126
6.3.3.2.	Control del bloqueig. ....	128
6.3.3.3.	Cicles no clau i superbàsics. ....	130
6.3.3.4.	Mètode de Newton Truncat. ....	131
6.3.3.5.	Factorització de la base de treball. ....	134
6.4.	Conclusions. ....	135

## SEGONA PART:

### Model Acoblat de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini.

<b>7. Formulació i Antecedents (II).</b> ....	137
7.1. Problemes d'Optimització i de Coordinació Hidro-Tèrmica. ....	137
7.2. Model desacoblats de Planificació Hidro-Tèrmica. ....	138
7.2.1. Subproblema hidràulic. ....	139
7.2.2. Suproblema tèrmic. ....	140
7.3. Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica. ....	140
<b>8. Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica.</b> ....	143
8.1. Xarxa Hidràulica (XH). ....	143
8.2. Funció de generació hidràulica. ....	145
8.3. Linealització de la generació hidràulica. ....	146
8.4. Reserva rodant hidràulica. ....	147
8.5. Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica a Curt Termini. ....	148
<b>9. Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica.</b> ....	151
9.1. Model de xarxa de la generació tèrmica. ....	151
9.1.1. Xarxa tèrmica equivalent del generador tèrmic $j$ . ....	151
9.1.2. Xarxa tèrmica a l'interval $i$ ( $XT^{(i)}$ ). ....	153
9.1.3. Constriccions multiples de reserva rodant. ....	155
9.1.4. Xarxa tèrmica. ....	156



## Índex de continguts (continuació)

9.2. Xarxa tèrmica i Elèctrica a l'interval $i$ ( $XTE^{(i)}$ ). . . . .	157
9.3. Xarxa ampliada (XA). . . . .	161
9.4. Costos de generació tèrmica i pèrdues a la xarxa de transmissió. . . . .	162
9.5. Model Acoblat de Planificació Hidrotèrmica. . . . .	163
9.5.1. Funció Objectiu. . . . .	163
9.5.2. Equacions de xarxa. . . . .	163
9.5.3. Constriccions d'acoblament : càrrega i reserva. . . . .	164
9.6. Algorisme de resolució. . . . .	165
<b>10. Resultats computacionals (II).</b> . . . . .	<b>169</b>
10.1. Descripció dels problemes. . . . .	169
10.2. Resolució detallada d'un problema MAPH. . . . .	173
10.3. Resultats computacionals. . . . .	175
10.4. No convexitat del problema. . . . .	177
10.5. Conclusions. . . . .	178
<b>11. Conclusions i línies futures de recerca.</b> . . . . .	<b>179</b>
11.1. Conclusions. . . . .	179
11.2. Línies futures de recerca. . . . .	181
11.2.1. Fluxos no lineals amb constriccions a banda no lineals. . . . .	181
11.2.2. Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica. . . . .	182
 <b>APÈNDIXS</b>	
<b>AP1 Coeficients de l'aproximació lineal de la generació hidràulica.</b> . . . . .	<b>185</b>
<b>AP2 Taules de resultats computacionals de MINOS 5.3 i NOXCB 9.0.</b> . . . .	<b>187</b>
<b>AP3 Taules d'eficiència relativa MINOS 5.3 - NOXCB 9.0.</b> . . . . .	<b>197</b>
<b>AP4 Bibliografia.</b> . . . . .	<b>205</b>
<b>AP5 Glossari de símbols.</b> . . . . .	<b>213</b>
<b>AP6 Índex de matèries.</b> . . . . .	<b>219</b>

## Índex d'algorismes

Algorisme 3.1 : Algorisme del Conjunt de Constriccions Actives. ....	22
Algorisme 3.2 : Càlcul de $w = B^{-1}v$ .....	26
Algorisme 3.3 : Càlcul de $w = B^{-1}[0 \quad   \quad vt]'$ .....	26
Algorisme 3.4 : Càlcul de $[w'_A \quad   \quad w'_T] = [v'_A \quad   \quad v'_c]B^{-1}$ .....	27
Algorisme 4.1 : $w = \Theta_c v$ .....	37
Algorisme 4.2 : $w = \Theta_s v$ .....	37
Algorisme 4.3 : $w' = v' \Theta_c$ .....	37
Algorisme 4.4 : $w' = v' \Theta_s$ .....	37
Algorisme 4.5 : $w = M\theta$ .....	38
Algorisme 4.6 : $w = B^{-1}v$ , sense $\overset{\circ}{C}$ . ....	39
Algorisme 4.7 : $w = B^{-1}v$ , amb $\overset{\circ}{C}$ . ....	40
Algorisme 4.8 : $w = B^{-1}m_q$ , $q$ arc, sense $\overset{\circ}{C}$ . ....	41
Algorisme 4.9 : $w = B^{-1}m_q$ , $q$ arc, amb $\overset{\circ}{C}$ . ....	41
Algorisme 4.10 : $w = B^{-1}m_q$ , $q$ folga, sense $\overset{\circ}{C}$ . ....	42
Algorisme 4.11 : $w = B^{-1}m_q$ , $q$ folga, amb $\overset{\circ}{C}$ . ....	42
Algorisme 4.12 : $w' = v'B^{-1}$ , $v$ vector qualsevol, sense $\overset{\circ}{C}$ . ....	43
Algorisme 4.13 : $w' = v'B^{-1}$ , $v$ vector qualsevol, amb $\overset{\circ}{C}$ . ....	43
Algorisme 4.14 : $w' = [e_i^{m'} \quad   \quad 0] B^{-1}$ , sense $\overset{\circ}{C}$ . ....	43
Algorisme 4.15 : $w' = [e_i^{m'} \quad   \quad 0] B^{-1}$ , amb $\overset{\circ}{C}$ . ....	43
Algorisme 4.16 : $w' = [0 \quad   \quad e_i^{t'}] B^{-1}$ .....	44
Algorisme 4.17 : $-B^{-1}(Sv)$ sense $\overset{\circ}{C}$ .....	46
Algorisme 4.18 : $-B^{-1}(Sv)$ amb $\overset{\circ}{C}$ .....	46
Algorisme 4.19 : $w_B = Zv$ amb $\overset{\circ}{C}$ i $\overset{\circ}{S}$ . ....	47
Algorisme 4.20 : $w = Z'v$ .....	49
Algorisme 4.21 : $\sigma_N = g(x)_N - N'\pi$ .....	50
Algorisme 5.1 : Càlcul d'una solució factible inicial de <b>(FNCL)</b> . ....	68
Algorisme 5.2 : Exploració Lineal de Bertsekas. ....	71
Algorisme 5.3 : Algorisme del Mètode de Newton Truncat .....	74
Algorisme 5.4 : Taxació. ....	88

Índex d'algorismes (continuació)

Algorisme 5.5 : Identificació d'òptims de <b>(FNCL)</b> .....	92
Algorisme 9.1 : Algorisme de resolució del model MAPH .....	166

## Índex de taules

- Taula 6.1 : Models *rmfa*.
- Taula 6.2 : Models *rmfb*.
- Taula 6.3 : Paràmetres del generador Gridgen.
- Taula 6.4 : Models *ggeb*.
- Taula 6.5 : Models *gged*.
- Taula 6.6 : Models *gotd*.
- Taula 6.7 : Paràmetres i models de les funcions objectiu Namur.
- Taula 6.8 : Paràmetres i models de les funcions objectiu EIO1.
- Taula 6.9 : Models *xh*: problemes d'Optimització Hidro-Tèrmica.
- Taula 6.10 : Models *xa*: problemes de Planificació Hidro-Tèrmica.
- Taula 6.11 : Eficiència temps total segons models i f.o.
- Taula 6.12 : Eficiència temps total d'execució segons la dimensió del problema.
- Taula 6.13 : Eficiència en funció del valor dels elements de les constriccions a banda.
- Taula 6.14 : Eficiència en funció de l'esparsitat de les constriccions a banda.
- Taula 6.15 : Eficiència en funció de %s\*.
- Taula 6.16 : Problemes col·lecció EIO/UPC10.
- Taula 6.17 : Eficiència de l'exploració lineal de Bertsekas.
- Taula 6.18 : Resultats amb exploració lineal de Bertsekas.
- Taula 6.19 : Resultats amb control de bloqueig.
- Taula 6.20 : Eficiència del control de bloqueig.
- Taula 6.21 : Eficiència de l'ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ .
- Taula 6.22 : Resultats amb ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ .
- Taula 6.23 : Resultats amb el Mètode de Newton Truncat.
- Taula 6.24 : Eficiència del Mètode de Newton Truncat.
- Taula 6.26 : Resultats amb factorització LU de Q.
- Taula 6.25 : Eficiència de la factorització LU de Q.
- Taula 10.1 : Característiques dels models MAPH
- Taula 10.2 : Característiques dels sistemes hidràulics.
- Taula 10.3 : Coeficients de l'alçada equivalent.
- Taula 10.4 : Eficiència de la generació hidràulica.
- Taula 10.5 : Unitats tèrmiques models A i B.

## Índex de taules (continuació)

- Taula 10.6 : Dades de la xarxa de transmissió models B.
- Taula 10.7 : Càrrega prevista model B48x.
- Taula 10.8 : Resultats computacionals models MAPH.
- Taula A2.1 : Resultats model 10 rmfa.
- Taula A2.2 : Resultats model 20 rmfa.
- Taula A2.3 : Resultats model 22 rmfa.
- Taula A2.4 : Resultats model 10 rmfb.
- Taula A2.5 : Resultats model 20 rmfb.
- Taula A2.6 : Resultats model 22 rmfb.
- Taula A2.7 : Resultats model 13 ggeb.
- Taula A2.8 : Resultats model 21 ggeb.
- Taula A2.9 : Resultats model 22 ggeb.
- Taula A2.10 : Resultats model 22 gged.
- Taula A2.11 : Resultats model 21 gotd.
- Taula A2.12 : Resultats models d'Optimització Hidro-Tèrmica..
- Taula A2.13 : Resultats models de Planificació Hidro-Tèrmica.
- Taula A3.1 : Eficiència relativa model 10 rmfa.
- Taula A3.2 : Eficiència relativa model 20 rmfa.
- Taula A3.3 : Eficiència relativa model 22 rmfa.
- Taula A3.4 : Eficiència relativa model 10 rmfb.
- Taula A3.5 : Eficiència relativa model 20 rmfb.
- Taula A3.6 : Eficiència relativa model 22 rmfb.
- Taula A3.7 : Eficiència relativa model 13 ggeb.
- Taula A3.8 : Eficiència relativa model 21 ggeb.
- Taula A3.9 : Eficiència relativa model 22 ggeb.
- Taula A3.10 : Eficiència relativa model 22 gged.
- Taula A3.11 : Eficiència relativa model 21 gotd.
- Taula A3.12 : Eficiència relativa models d'Optimització Hidro-Tèrmica.
- Taula A3.13 : Eficiència relativa models de Planificació Hidro-Tèrmica.

## Índex de figures

- Figura 4.1 : Error numèric en el càlcul de  $p_A$
- Figura 4.2 : Ordenació de Hellerman i Rarick.
- Figura 6.1 : Di2no, generador de constriccions a banda
- Figura 6.2 : Xarxa dels problemes d'Optimització Hidro-Tèrmica.
- Figura 6.3 : Xarxa del models de Planificació Hidrotèrmica.
- Figura 6.4 : Representació gràfica execucions col·lecció EIO/UPC.
- Figura 6.5 : Histograma eficiència NO vs. MI temps total.
- Figura 6.6 : Comparació MI vs. NO fases 0+1 i fase 2
- Figura 6.7 : Comparació temps per iteració fase 0+1
- Figura 6.8 : Relació de l'eficiència amb la fracció de constriccions a banda
- Figura 6.9 : Relació de l'eficiència amb  $\%c_x^*$ .
- Figura 6.10 : Relació de l'eficiència amb la fracció de variables superbàsiques a l'òptim.
- Figura 8.1 : Xarxa hidràulica XH
- Figura 9.1 : Funcions de reserva rodant de la  $j$ -èssima unitat tèrmica
- Figura 9.2 : Xarxa tèrmica equivalent per a la unitat tèrmica  $j$ -èssima.
- Figura 9.3 : Reserva rodant multiple.
- Figura 9.4 :  $XT^{(i)}$ , xarxa tèrmica interval  $i$ -èssim.
- Figura 9.5 : Xarxa tèrmica de la unitat “ $j$ ”
- Figura 9.6 : Xarxa tèrmica i elèctrica  $XTE^{(i)}$
- Figura 9.7 : Xarxa ampliada XA.
- Figura 10.1 : Cobriment de la càrrega a l'òptim del problema B48x.
- Figura 10.3 : Reserva incremental a l'òptim del problema B48x.
- Figura 10.4 : Reserva decremental a l'òptim del problema B48x.
- Figura 10.5 : Flux de potència línia  $ln_3$ .
- Figura 10.2 : Xarxa de transmissió pel problema B48x.

# CAPÍTOL 1

## Introducció.

### 1.1 Presentació.

El treball presentat a la tesi doctoral “*Optimització de fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda. Aplicació a models acoblats de Coordinació Hidro-Tèrmica a curt termini*” es desenvolupa al llarg de la intersecció de dos camps amplis com són el de l’optimització de fluxos en xarxes i el de la coordinació de la producció a curt termini d’energia elèctrica de centrals tèrmiques i hidràuliques. La resolució de problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica mitjançant tècniques de fluxos no lineals en xarxes ha estat un tema de recerca intens els darrers anys. Amb aquesta tesi doctoral es pretén contribuir als dos camps abans esmentats mitjançant :

- a) L’estudi, desenvolupament i implementació computacional d’un algorisme de fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals.
- b) La formulació i resolució mitjançant l’algorisme abans esmentat d’un nou model acoblat de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini.

Aquestes dues línies de recerca són prou diferenciades i els resultats obtinguts a cadascuna d’elles tenen suficient interès com per a justificar una presentació per separat. Per aquesta raó, tant la realització de la tesi com l’elaboració de la present memòria de tesi doctoral s’ha estructurat en dues parts, el contingut i objectius de les quals es presentaran a continuació.

## 1.2 Primera part : Fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda.

### 1.2.1 Objectius.

Els objectius plantejats dins d'aquesta fase són :

- 1.- Desenvolupament d'un algorisme especialitzat de fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda. L'algorisme es disenyarà com una especialització del mètode general del conjunt de constriccions actives d'optimització no lineal amb constriccions lineals en la variant de Murtagh i Saunders, on l'estructura de xarxa s'explotarà mitjançant l'ús de tècniques de particionament primal.
- 2.- Implementació computacional de l'algorisme desenvolupat.
- 3.- Estudi empíric de l'eficiència de la implementació de l'algorisme desenvolupat comparada amb un paquet d'optimització no especialitzat.

### 1.2.2 Desenvolupament.

Els capítols que conformen aquesta primera part i un resum del seu contingut són :

**Capítol 2 Formulació i antecedents (I):** descripció de l'evolució i de l'estat actual de la recerca al camp dels fluxos amb constriccions a banda, començant pels treballs dedicats a fluxos lineals amb constriccions a banda, passant pels algorismes de fluxos no lineals sense constriccions addicionals i acabant pels intents d'abordar el problema de fluxos no lineals amb constriccions a banda.

**Capítol 3 Fonaments de l'algorisme de resolució del problema (FNCL):** descripció bàsica de l'algorisme del conjunt de constriccions actives en la variant de Murtagh i



Saunders, i de les tècniques de particionament primal per al tractament de problemes de fluxos lineals amb constriccions a banda en que es basa l'algorisme proposat.

**Capítol 4 Explotació de l'estructura del problema (FNCL):** especialització de les operacions algebraïques presents a l'algorisme del conjunt de constriccions actives quan s'aplica a la resolució del problema de fluxos no lineals amb constriccions a banda.

**Capítol 5 Implementació de l'algorisme de resolució del problema (FNCL):** descripció de la versió de l'algorisme del conjunt de constriccions actives que es proposa per a la resolució del problema de fluxos no lineals en xarxa amb constriccions a banda lineals. Hom parlarà del mètode de càlcul de solucions inicials factibles, dels mètodes de resolució dels subproblemes a l'espai nul de les constriccions actives i dels mecanismes de identificació de solucions òptimes.

**Capítol 6 Resultats computacionals (I):** l'algorisme especialitzat descrit als capítols anteriors ha estat implementat en FORTRAN i el resultat, el codi NOXCB 9.0, s'ha provat sobre una col·lecció de problemes de diferent dimensió i estructura provinents tant de models generats aleatoriament com de problemes reals del camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica. Es presenta una descripció de les característiques del codi NOXCB 9.0, els resultats de les proves computacionals realitzades i la seva comparació amb els resultats obtinguts amb la resolució dels mateixos models amb el paquet d'optimització no lineal MINOS 5.3.

## 1.3 Segona part : Model Acoblat de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini.

### 1.3.1 Objectius.

Els objectius que fan referència al camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica són :

- 4.- Elaboració d'un model matemàtic que permeti l'optimització conjunta dels sistemes hidràulic i tèrmic i que incorpori constriccions de càrrega, de reserva rodant i un model explícit de la xarxa de transmissió. Hom haurà de formular aquest model com a problema de fluxos no lineals en xarxa amb constriccions a banda.
- 5.- Resolució del model acoblat amb la implementació de l'algorisme desenvolupat a la Part I aplicat sobre sistemes hidrotèrmics de gran escala.

### 1.3.2 Desenvolupament.

El material desenvolupat durant la segona part del projecte de tesi ha estat recollit en els següents capítols :

**Capítol 7 Formulació i antecedents (II):** resenya del l'estat de la recerca al camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini, des dels primers models d'Optimització Hidro-Tèrmica sense presència explícita del parc tèrmic fins als darrers models de Coordinació Hidro-Tèrmica amb assignació d'unitats tèrmiques.

**Capítol 8 Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica.:** descripció de la *xarxa hidràulica (XH)* que modelitza l'evolució temporal de l'estat dels embassaments d'un sistema de centrals hidràuliques de generació d'energia elèctrica. Descripció de la funció de generació hidràulica i dels models d'Optimització Hidro-Tèrmica.

**Capítol 9 Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica :** es defineixen els conceptes de *xarxa tèrmica (XT)*, que permet modelitzar la producció de les centrals tèrmiques mitjançant un model de fluxos en xarxes amb constriccions a banda, i de *xarxa tèrmica i elèctrica (XTE)*, que estén la xarxa tèrmica incloent la xarxa de transmissió amb l'aproximació de corrent continu. Es defineix i justifica el concepte de *xarxa ampliada (XA)* que integra les xarxes hidràulica, tèrmica i de transmissió i es formula el *Model Acoblat de Planificació Hidrotèrmica (MAPH)*, proposant un mètode de resolució aproximat basat en linealitzacions successives.

**Capítol 10 Resultats computacionals (II):** avaluació de la validesa del mètode proposat de linealitzacions successives a partir de l'estudi dels resultats obtinguts en l'optimització d'una bateria de problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica i la seva comparació amb el resultat proporcionats pel paquet MINOS 5.3.

**Capítol 11 Conclusions i línies de futura recerca:** conclusions finals i possibles extensions del treball realitzat.

## 1.4 Aportacions principals.

Les aportacions principals que la tesi fa al camp de l'optimització de fluxos en xarxes són :

- 1.- Un estudi detallat de l'estructura de l'algorisme del conjunt de constriccions actives en la variant descrita per Murtagh i Saunders quan s'aplica a la resolució de problemes de fluxos en xarxes amb constriccions a banda lineals. (capítols 4 i 5 ).
- 2.- La creació del paquet NOXCB 9.0 : codi especialitzat de fluxos en xarxes no lineals amb constriccions a banda lineals que incorpora les tècniques desenvolupades als capítols 4 i 5 .
- 3.- L'estudi empíric, mitjançant experiments computacional amb el paquet NOXCB 9.0, de *a)* el grau d'eficiència de la implementació de l'algorisme proposat comparat amb el paquet d'optimització no lineal de propòsit general MINOS, *b)* de la dependència del grau d'eficiència amb les característiques del problema i *c)* de la influència de

certes variants algorísmiques descrites als capítols 4 i 5 sobre l'eficiència de NOXCB 9.0.

Les principals aportacions en el camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini són :

- 4.- La introducció del concepte de *xarxa tèrmica* que permet la modelització de la generació i reserva tèrmica mitjançant un model de fluxos en xarxes amb constriccions a banda.
- 5.- La introducció del concepte de *xarxa ampliada* que proporciona un nou model de fluxos en xarxes per a la Coordinació Hidro-Tèrmica amb acoblament d'unitats hidràuliques i tèrmiques (MAPH). L'ús del concepte de xarxa ampliada permet formular constriccions conjuntes hidràuliques i tèrmiques de reserva rodant.
- 6.- La definició d'un mètode aproximat de resolució del model acoblat basat en linealitzacions successives de la generació hidràulica.
- 7.- Creació del paquet MAPHLI 2.2 : codi de resolució del model acoblat de Coordinació Hidro-Tèrmica basat en el programa NOXCB 9.0.
- 8.- La resolució de problemes reals de gran escala de Coordinació Hidro-Tèrmica mitjançant els paquets MAPHLI 2.2 i MINOS 5.3.

## CAPÍTOL 2

### Formulació i antecedents (I).

#### 2.1 Formulació.

El problema de *fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals (FNCL)* consisteix en la minimització d'una funció objectiu no lineal les variables de la qual representen els fluxos circulants pels arcs d'una xarxa amb capacitats. Aquests fluxos, a més de satisfer les equacions de balanç als nusos, estan sotmesos a un conjunt addicional de constriccions lineals, anomenades *constriccions a banda*. L'expressió matemàtica d'aquest problema en forma estàndard és :

$$\text{(FNCL)} \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) & (2.1a) & f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2 \\ \text{subj. a :} & Ax = r & (2.1b) & A \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, r \in \mathbb{R}^m \\ & Tx + \mathbf{I}_z z = b & (2.1c) & T \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{n}}, \text{rang}(T) = t \\ & 0 \leq x \leq u_x & (2.1d) & ; \quad x, u_x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\ & 0 \leq z \leq u_z & (2.1e) & b \in \mathbb{R}^t, z, u_z \in \mathbb{R}^{\tilde{t}}, \mathbf{I}_z \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{t}} \\ & u_{x\tilde{n}} = 0 & (2.1f) & \end{array} \right.$$

on :

- (2.1a) Representa una certa funció no lineal dels fluxos  $x$  circulants pels  $n$  arcs de la xarxa.
- (2.1b)  $A$  és la matriu d'incidències nusos-arcs de la xarxa i  $r$  el vector d'injeccions als nusos. S'indicarà per  $\mathcal{G}$  el graf dirigit associat a la matriu  $A$ . S'assumirà que  $\mathcal{G}$  és connex i que la xarxa està balancejada. Si  $\mathcal{G}$  té  $n$  arcs, aleshores  $\tilde{n} = n + 1$ , on la columna

(n+1)-èssima de  $A$  correspon a l'arc fictici que connecta el nus arrel amb un nus qualsevol de la xarxa, necessari per a tenir un conjunt d'equacions de xarxa de rang complet. Obviament  $x_{n+1} = 0$  (equació (2.1f)). El nus origen de l'arc  $x_i$  s'indicarà amb  $o(i)$  i amb  $d(i)$  el nus destí .

- (2.1c) Conjunt de  $t$  constriccions a banda lineals. Les variables  $z$  representen les folgues que permeten passar d'un conjunt qualsevol de constriccions a banda a la forma estàndard representada a **(FNCL)**. Si originalment existeixen constriccions a banda de  $\geq$  es consideren canviades de signe. La matriu  $\mathbf{I}_z \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{t}}$ , on  $\tilde{t}$  indica el nombre de constriccions a banda de  $\leq$ , està formada amb les columnes de la matriu identitat  $t \times t$  associada a les folgues de les constriccions de  $\leq$ . S'indicarà amb  $\mathcal{Z}$  el conjunt d'índexos de les constriccions a banda de  $\leq$ .
- (2.1d) Capacitats dels arcs de la xarxa. Si un arc té una fita inferior  $l_i$  no nul·la, es passa a la forma estàndard mitjançant el canvi de variable  $\tilde{x}_i = x_i - l_i$  i la modificació corresponent de les injeccions dels nussos origen i destí , la capacitat  $u_i$  i el terme independent  $b$ .
- (2.1e) Fites a les folgues  $u_z$ . Permeten considerar constriccions a banda afitades del tipus  $\underline{b}_j \leq t^j x \leq \bar{b}_j$ , fent  $t^j x + z_j = \bar{b}_j$  i  $0 \leq z_j \leq u_{z_j} = (\bar{b}_j - \underline{b}_j)$ .

L'algorisme desenvolupat per a resoldre aquest problema es basa en les tècniques d'optimització de fluxos lineals amb constriccions a banda i en els mètodes d'optimització de fluxos no lineals purs. A les següents seccions es descriuran els treballs previs en aquests dos camps que més han influït en l'algorisme presentat a aquesta tesi.

## 2.2 Fluxos Lineals amb Constriccions a Banda Lineals (FLCL) .

Amb els mateixos criteris usats en la definició de la forma estàndard del problema **(FNCL)** es defineix la forma estàndard del problema de *fluxos lineals en xarxa amb constriccions a banda lineals* :

$$\begin{array}{l}
 \text{(FLCL)} \left\{ \begin{array}{ll}
 \min & c'x \quad (2.2a) \quad c, x \in \mathbb{R}^n \\
 \text{subj. to :} & Ax = r \quad (2.2b) \quad A \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, r \in \mathbb{R}^m \\
 & Tx + \mathbf{I}_z z = b \quad (2.2c) \quad T \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{n}}, \text{rang}(T) = t \\
 & 0 \leq x \leq u_x \quad (2.2d) \quad ; \quad u_x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\
 & 0 \leq z \leq u_z \quad (2.2e) \quad b \in \mathbb{R}^t, z, u_z \in \mathbb{R}^{\tilde{t}} \\
 & u_{x\tilde{n}} = 0 \quad (2.2f) \quad \mathbf{I}_z \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{t}}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Aquest és un cas particular dels anomenats *problemes de fluxos lineals inserits*<sup>1</sup> (**FLI**). Seguint l'exposició de Glover i Klingman a [34], s'adoptarà com a definició d'aquests problemes la donada pel següent enunciat :

**Definició 2.1 Problemes de fluxos lineals inserits (FLI) :** Són problemes de programació lineal, amb o sense fites, on la matriu de constriccions  $M$  adopta la forma :

$$M = \begin{matrix} m \\ t \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^n & \overbrace{\quad}^p \\ M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

amb  $M_1$  tal que cada columna conté, com a màxim, un coeficient amb valor +1, un coeficient amb valor -1, sent la resta de coeficients nuls.

Les columnes corresponents a  $\begin{bmatrix} M_2 \\ M_4 \end{bmatrix}$  s'anomenaran *columnes a banda*, mentre que les files corresponents a  $[M_3 \ M_4]$  seran les anomenades *files a banda*. Alguns casos particulars del problemes de fluxos inserits són :

*Cas a)*  $m = n = 0$  : problema lineal estàndard.

*Cas b)*  $p = t = 0$  : problemes purs de fluxos en xarxes uniarticle.

*Cas c)*  $p = 0$  : problemes de fluxos multiarticle i fluxos uniarticle amb constriccions a banda. Si, a més, la submatriu  $M_1$  conté només un únic coeficient no nul s'obtenen els problemes de fites superiors generalitzades GUB.

---

<sup>1</sup> "LP/embedded network problems"

El problema **(FLCL)** correspon al cas  $p = 0$ , doncs, deixant a banda les folgues, la matriu de constriccions de **(FLCL)** es pot expressar com :

$$M = \begin{matrix} m \\ t \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\left[ \begin{matrix} M_1 \\ M_3 \end{matrix} \right]}^n \\ \end{matrix} \right. = \begin{matrix} \overbrace{\left[ \begin{matrix} A \\ T \end{matrix} \right]}^{\tilde{n}} \end{matrix}$$

Les tècniques de resolució dels problemes **(FLI)** varen ésser desenvolupades fonamentalment durant la segona dècada dels anys seixanta i al llarg de la dècada dels setanta, per bé que les idees generals d'alguns mètodes provenen de la dècada dels cinquanta (Dantzig [16], 1955). Tradicionalment els problemes **(FLI)** han estat abordats amb mètodes de *descomposició* i de *particionament*, havent-se proposat també mètodes de *relaxació Lagrangiana* [1].

Els mètodes de descomposició, dictada per preus i dictada per recursos han estat dedicats fonamentalment a la resolució dels problemes de fluxos multiarticle (cas  $c$ ). Les tècniques de particionament han estat emprades en la resolució dels tots els problemes inclosos dins del cas  $c$ . Una revisió completa de la bibliografia d'aquests mètodes fins a finals dels setanta es pot trobar a [34], i es basen en extensions del mètode GUB de Dantzig i Van Slyke [18]. Aquests mètodes es basen en una implementació especialitzada de l'algorisme del símplex revisat on la solució dels sistemes habituals d'equacions lineals, de dimensió  $m + t$ , es poden obtenir resolent sistemes d'equacions amb estructura especial (per exemple, corresponents a problemes de fluxos en xarxes), que admeten ser resolts eficientment, i altres sistemes, amb matriu de coeficients anomenada *base de treball*, densa però de dimensió reduïda ( $\leq t$ ). Bennet [5] presenta un algorisme per al tractament dels problemes anomenats "*sistemes angulars*", que són problemes **(FLI)** sense columnes a banda, amb una estructura de la matriu  $M$  donada per :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^1 & & & \\ & M_1^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_1^k \\ M_3^1 & M_3^2 & \dots & M_3^k \end{bmatrix}$$

El problema **(FLCL)** és un cas particular on  $k = 1$ . En aquest treball es poden trobar ja les expressions pel càlcul eficient del vector d'elements pivotals i dels costos reduïts del problema **(FLCL)**, així com una descripció dels casos de pivotació que seran recollits pels



algorismes específics de resolució de **(FLCL)**. El mecanisme d'actualització de la base de treball és diferent del que serà adoptat pels desenvolupaments posteriors [13,51] i es basa en una actualització per addició de matrius de rang 1 aplicant la fórmula de Sherman-Morrison ([55], pàg. 269). Hartman i Lasdon [41] presenten una especialització de l'algorisme del simplex revisat per a la resolució del cas més general de problema **(FLI)** ( $t \neq 0$ ,  $p \neq 0$ ). Descriuen el procés d'actualització de la base de treball mitjançant productes per matrius eta i parlen ja de *columnnes clau* i *columnnes no clau*. Fan un petit comentari del cas sense columnnes a banda i presenten resultats computacionals per a problemes de fins a  $n + p = 3225$  i  $m + t = 362$  (amb un nombre de constriccions a banda petit,  $t = 12$ ). Chen i Saigal desenvolupen a [13] l'algorisme de resolució de **(FLCL)** practicament ja en la forma definitiva que serà recollida per Kennington i Helgason a [51]. A banda de la descripció de l'algorisme fan una discussió de la seva implementació i presenten un mètode especialitzat per al càlcul de solucions inicials factibles. Justifiquen la superioritat del codi desenvolupat respecte de la implementació d'un algorisme “*out-of-kilter*” mitjançant un nombre reduït de proves computacionals on resolen problemes de fluxos purs de fins a 212 nusos i 2020 arcs. També resolen dos problemes amb 18 constriccions a banda, 69 nusos i 121 arcs, i ho comparen amb els temps obtinguts pel paquet de programació lineal MPSX.

Kennington i Helgason recolliren a [51] l'estat de l'art dels mètodes de fluxos en xarxes a començament dels vuitanta, dedicant un capítol a la resolució per tècniques de particionament primal del problema **(FLI)** amb una matriu  $M$  donada per

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

Aquest problema correspon al problema **(FLCL)** amb un conjunt de variables addicionals no associades a fluxos. L'algorisme de resolució del problema **(FNCL)** desenvolupat a aquesta tesi es basa en aquest text en tot allò que fa referència a la gestió de les bases de la matriu de constriccions (resolucions de sistemes d'equacions i actualitzacions per pivotació).

Tot i que el nombre de treballs publicats sobre els problemes **(FLCL)** és elevat, no ho és tant el nombre d'implementacions. A banda dels codis experimentals, es coneix dos codis “professionals” de fluxos lineals amb constriccions a banda. El primer és el paquet NETSIDE [52] de Kennington i Whisman, que implementa l'algorisme descrit a [51], i el paquet CPLEX [4], que incorpora un mòdul de fluxos lineals amb constriccions a banda

resolt mitjançant tècniques basades en el simplex. També es disposa el codi FXCB [44], desenvolupat per Heredia i Nabona com a primera part d'aquesta tesi.

### 2.3 Fluxos no lineals (FN).

La formulació del problema de fluxos no lineals és :

$$\begin{array}{l}
 \text{(FN)} \left\{ \begin{array}{ll}
 \min & f(x) & (2.4a) & f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2 \\
 \text{subj. a :} & Ax = r & (2.4b) & A \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, r \in \mathbb{R}^m \\
 & 0 \leq x \leq u & (2.4c) & ; \quad x, u \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\
 & u_{\tilde{n}} = 0 & (2.4d) &
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

L'evolució dels mètodes de resolució del problema (FN) ha anat lligada a l'evolució dels mètodes d'optimització no lineal amb constriccions lineals, dels quals el problema (FN) n'és un cas particular. Els primers algorismes estaven basats en extensions de l'algorisme del simplex primal, com ara el mètode de Frank-Wolfe (Florian [31], Nguyen [63]), linealitzacions a trams (Collins et al. [15], Meyer [58]) el mètode del simplex convex (SC) (Collins et al. [15], Helgason i Kennington [42]) i l'algorisme del gradient reduït (GR) (Rosenthal [68], Dembo i Klincewicz [23]).

L'article de Rosenthal [68] presenta un algorisme de resolució de (FN) basat en el gradient reduït especialitzat per a problemes d'Optimització Hidro-Tèrmica. La versió de l'algorisme del gradient reduït usada coincideix amb la descrita a [55], sense la presència de conjunt de variables superbàsiques. La implementació d'aquest l'algorisme es prova sobre un únic model d'Optimització Hidro-Tèrmica que origina un problema (FN) amb 410 arcs i 312 nusos.

Ron S. Dembo i els seus col·laboradors han desenvolupat una tasca constant en el desenvolupament d'algorismes especialitzats de fluxos no lineals cada cop més sofisticats. El treball de Dembo i Klincewicz [23] representa la incorporació de l'estratègia del conjunt de variables superbàsiques (Murtagh i Saunders [59]) al mètode del gradient reduït,

estratègia que esdevindrà l'estàndard en els desenvolupaments posteriors de codis especialitzats per al problema **(FN)**. Es presenten resultats computacionals amb problemes fins a 666 nusos i 906 arcs, comparant el seu codi, amb i sense escalat, i la implementació del SC de Helgason i Kennington [42]. Els estudis sobre mètodes de Newton aproximats desenvolupats a [22] i [24] conduïren al desenvolupament del codi NLPNET que incorporà un mètode de Newton Truncat pel càlcul de direccions factibles de descens. A [20], Dembo efectua la comparació del codi NLPNET amb la implementació del codi GR de Dembo i Kliniewicz [23] i amb el codi SC de Helgason i Kennington [42] sobre els mateixos problemes usats a [23]. La descripció detallada de l'algorisme implementat a NLPNET es realitza a [21]. Es presenten resultats per problemes de fins a 2230 arcs i 1116 nusos, comparant el comportament del codi NLPNET amb els codis ja habituals de SC [42] i GR [23] i amb el paquet MINOS [61]. Escudero [30] també ha presentat el codi NLRNET que implementa mètode de Newton Truncat aplicat a la resolució de problemes **(FN)**, amb la incorporació del concepte del conjunt independent de variables superbàsiques que ja va ésser esbosat per Dembo a [21].

La darrera contribució significativa al camp dels fluxos no lineals en xarxes que ha influït en l'algorisme que es proposarà per a la resolució de **(FNCL)** ha estat el treball de Toint i Tuytens [72,73]. En ell es descriu un algorisme especialitzat per a la resolució del problema **(FN)** amb funció objectiu parcialment separable, i la seva implementació LSNNO. Incorpora un algorisme de conjunt actiu de constriccions tipus MINOS i permet l'obtenció de direccions de descens mitjançant diversos mètodes que inclouen el mètode de Newton, Newton Truncat, Newton Truncat amb diferències finites i, finalment, aproximació quasi-Newton. Incorpora l'estratègia del conjunt independent de variables superbàsiques de Escudero [30] i la tècnica de resolució de problemes no lineals sotmessos a fites simples de Bertsekas [6]. No s'inclouen comparacions del codi desenvolupat amb cap altre codi, ni especialitzat ni de propòsit general, però es presenta un ampli estudi del comportament de l'algorisme sota diverses situacions. Les proves computacionals es realitzen sobre un conjunt de problemes ficticis de fins a 1300 arcs i 676 nusos i amb els models usats a l'article de Dembo [21], de fins a 2230 arcs i 1116 nusos.

## 2.4 Fluxos No Lineals amb Constriccions a Banda Lineals (FNCL) .

Els únics antecedents trobats d'algorismes de resolució del problema (FNCL) són tres treballs que pertànyen al camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica.

El primer correspon a l'article de Brännlud, Sjelvgren i Bubenko [8]. Resolen un problema (FNCL) , aplicant un algorisme de gradient reduït sobre el problema fluxos no lineals purs associat a (FNCL) , projectant la direcció de cerca trobada sobre el conjunt factible respecte de les constriccions a banda actives, seguint l'esquema del mètode de les *direccions factibles* ([2], secció 13.4). El segon treball és l'article de Carvalho, Soares i Ohishi [10]. Es tracta d'un algorisme de programació quadràtica basat en el mètode de símplex convex amb tècniques de particionament primal per al tractament de les constriccions a banda tal com es descriuen a [51]. Finalment, Wang et al. [77] referencien la resolució d'un problema (FNCL) similar al resultat per Carvalho et al. [10], però sense indicar clarament quin mètode fan servir. De les referències que inclouen [13,51,10], i tenint en compte que la funció objectiu del problema (FNCL) que resolen és quadràtica, és molt probable que l'enfoc sigui el mateix que el de Carvalho et al. (símplex convex més particionament primal aplicat a un problema de programació quadràtica).

Les bases de l'algorisme especialitzat de resolució del problema (FNCL) que es desenvoluparà dins d'aquesta tesi han estat presentades a [45,46].

## CAPÍTOL 3

### Fonaments de l'algorisme de resolució del problema (FNCL).

La forma estàndard del problema de fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals ha estat definida al capítol 2 com :

$$\begin{array}{l}
 \text{(FNCL)} \left\{ \begin{array}{ll}
 \min & f(x) & (2.1a) & f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2 \\
 \text{subj. a :} & Ax & = r & (2.1b) & A \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, r \in \mathbb{R}^m \\
 & Tx + \mathbf{I}_z z & = b & (2.1c) & T \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{n}}, \text{rang}(T) = t \\
 & 0 \leq x \leq u_x & & (2.1d) & ; \quad x, u_x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\
 & 0 \leq z \leq u_z & & (2.1e) & b \in \mathbb{R}^t, z, u_z \in \mathbb{R}^{\tilde{t}}, \mathbf{I}_z \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{t}} \\
 & u_{x_{\tilde{n}}} = 0 & & (2.1f) & 
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

L'algorisme desenvolupat per a la seva resolució es basa en :

- 1.- Els procediments de resolució de problemes d'optimització no lineal amb constriccions lineals derivats de l'algorisme del conjunt de constriccions actives.
- 2.- La tècnica de particionament primal d'optimització de fluxos lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals.

Aquest capítol recull de forma sintètica els fonaments d'aquestes dues parcel·les de l'optimització, necessaris per a comprendre el treball original dut a terme, i fixa gran part de la notació que serà emprada a la resta de la memòria. La demostració detallada dels resultats exposats en aquest capítol poden trobar-se a les referències bibliogràfiques que s'indican al final del mateix.

### 3.1 Optimització no lineal amb constriccions lineals. Problema (FNCL) .

Sigui el problema d'optimització no lineal amb constriccions lineals en forma estàndard (NCL) definit segons :

$$(\text{NCL}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \quad (3.1a) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2 \\ \text{subj. a :} & Mx = b \quad (3.1b) \quad ; \quad M \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rang}(M) = m \\ & 0 \leq x \leq u \quad (3.1c) \quad x, u \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

on ja es té en compte la introducció de les folgues i escreixos necessaris per a obtenir un conjunt de  $m$  constriccions d'igualtat. S'indicarà la factibilitat d'un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  respecte de (NCL) amb  $x \in \Omega_{NCL}$ , sent  $\Omega_{NCL}$  el conjunt de solucions factibles de (NCL) :

$$\text{Definició 3.1 : } \Omega_{NCL} = \{x \in \mathbb{R}^n : Mx = b, 0 \leq x \leq u\}$$

Donada una solució factible  $x \in \Omega_{NCL}$ ,  $g(x) \in \mathbb{R}^n$  denotarà el vector columna corresponent al gradient de la funció objectiu sobre  $x$  :

$$g(x) = \nabla f(x) \quad ; \quad g(x)_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

anàlogament, la matriu Hessiana de  $f$  s'indicarà per :

$$H(x) = \nabla^2 f(x) \quad ; \quad H(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad , \quad i, j = 1, \dots, n$$

#### 3.1.1 Partició de les variables.

Donat  $x \in \Omega_{NCL}$  es defineix la següent partició del conjunt de variables en variables *bàsiques*, *superbàsiques* i *no bàsiques* :

**Definició 3.2 Variables bàsiques :** conjunt de  $m$  variables de  $x$  amb valor  $0 \leq x_i \leq u_i$  i associades a una submatriu de  $M$  no singular. Es defineix

$\mathcal{B}$ : conjunt d'índexos de les variables bàsiques. Es dirà que  $x_i$  és variable bàsica si  $i \in \mathcal{B}$ .  $m = |\mathcal{B}|$ .

$x_{\mathcal{B}}$ : vector de variables bàsiques ( $x_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$ ). Si la variable  $x_i$  és la  $p$ -èsima variable bàsica, aleshores :  $\mathcal{B}_p = i$ ,  $x_{\mathcal{B}_p} = x_i$ ,  $u_{\mathcal{B}_p} = u_i$  i  $g(x)_{\mathcal{B}_p} = g(x)_i$ .

**Definició 3.3 Variables superbàsiques :** conjunt de variables de  $x$  tals que  $x_i \notin \mathcal{B}$  i  $0 < x_i < u_i$ . Es defineix

$\mathcal{S}$ : conjunt d'índexos de les variables superbàsiques. Es dirà que  $x_i$  és variable superbàsica si  $i \in \mathcal{S}$ .  $s = |\mathcal{S}|$ .

$x_{\mathcal{S}}$ : vector de variables superbàsiques ( $x_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^s$ ). Si la variable  $x_i$  és la  $p$ -èsima variable superbàsica, aleshores :  $\mathcal{S}_p = i$ ,  $x_{\mathcal{S}_p} = x_i$ ,  $u_{\mathcal{S}_p} = u_i$  i  $g(x)_{\mathcal{S}_p} = g(x)_i$ .

**Definició 3.4 Variables no bàsiques :** conjunt de variables de  $x$  tals que  $x_i \notin \mathcal{B}$  i  $x_i = 0$  o  $x_i = u_i$ . Es defineix :

$\mathcal{N}$ : conjunt d'índexos de les variables no bàsiques. Es dirà que  $x_i$  és variable no bàsica si  $i \in \mathcal{N}$ .  $n - m - s = |\mathcal{N}|$ . Es distingirà entre  $\mathcal{N}_u$  i  $\mathcal{N}_0$  definits com  $\mathcal{N}_u = \{i \in \mathcal{N} : x_i = u_i\}$  i  $\mathcal{N}_0 = \{i \in \mathcal{N} : x_i = 0\}$

$x_{\mathcal{N}}$ : vector de variables no bàsiques ( $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{(n-m-s)}$ ). Si la variable  $x_i$  és la  $p$ -èsima variable no bàsica, aleshores  $\mathcal{N}_p = i$ ,  $x_{\mathcal{N}_p} = x_i$  i  $u_{\mathcal{N}_p} = u_i$  i  $g(x)_{\mathcal{N}_p} = g(x)_i$ .

**Definició 3.5 Solució degenerada :**  $x' = [x_{\mathcal{B}}' \ x_{\mathcal{S}}' \ x_{\mathcal{N}}']$  és una solució degenerada si  $\exists i \in \mathcal{B}$  tq  $x_i = u_i$  ó  $x_i = 0$

Aquesta partició del conjunt de variables indueix una partició del conjunt de columnes

de la matriu  $M$  en les submatrius bàsica  $B$ , superbàsica  $S$  i no bàsica  $N$  :

$$M = \begin{array}{c|cc} & m & s & n - m - s \\ \hline & B & S & N \\ \hline \end{array} \quad (3.2)$$

sent  $B$  no singular, segons es desprén de la definició D3.2 .

### 3.1.2 Matriu de constriccions actives.

Donat  $x \in \Omega_{NCL}$ , el conjunt total de constriccions actives vindrà determinat per les  $m$  constriccions lineals definides pel sistema  $Mx = b$  més  $n - m - s$  constriccions addicionals que depenen del punt  $x$ , corresponents a les variables no bàsiques que, segons la definició D3.4 , es troben a una de les seves fites. La matriu de coeficients de les constriccions actives a  $x$  s'anomena *matriu de constriccions actives* :

**Definició 3.6 Matriu de constriccions actives :** Sigui  $x' = [x_{\mathcal{B}}' \ x_{\mathcal{S}}' \ x_{\mathcal{N}}']$ ,  $x \in \Omega_{NCL}$  solució factible de (NCL). Es defineix com la *matriu de constriccions actives* de (NCL) a  $x$  la matriu  $(n - s) \times n$  :

$$\bar{M} = \begin{array}{c|cc} & m & s & n - m - s \\ \hline & B & S & N \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \end{array} \begin{array}{l} m \\ n - m - s \end{array} \quad (3.3)$$

L'expressió de les constriccions actives a  $x \in \Omega_{NCL}$  és :

$$\bar{M}x = \bar{b} \quad ; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ b_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} \quad ; \quad b_{\mathcal{N}i} = \begin{cases} u_{\mathcal{N}i} & \text{si } \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_u \\ 0 & \text{si } \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_0 \end{cases} \quad (3.4)$$



on  $b_{\mathcal{N}}$  és el *vector de fites actives*.

### 3.1.3 Càlcul de direccions de cerca : subproblema a l'espai nul de $\bar{M}$ .

Considerem ara la solució factible  $x' = [x_{\mathcal{B}}' \ x_{\mathcal{S}}' \ x_{\mathcal{N}}'] \in \Omega_{NCL}$ . Es descriurà seguidament el procés de càlcul de direccions factibles de descens que conservin actives les constriccions (3.4) associades a  $x$ . Indicarem per  $N_{\bar{M}}$  l'*espai nul* o *espai tangent* de  $\bar{M}$  :

**Definició 3.7 Espai nul de  $\bar{M}$  :**  $N_{\bar{M}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{M}x = 0\}$

Sigui  $Z \in \mathbb{R}^{(n \times s)}$  una matriu les columnes de la qual formen una base de  $N_{\bar{M}}$ . Aquestes bases poden ser obtingudes de diverses formes. La tècnica més habituals és l'anomenada *tècnica de reducció de variables*, on la matriu  $Z$  pren la forma :

$$Z = \begin{matrix} & & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^s \\ & m \{ & \left[ \begin{array}{c} -B^{-1}S \\ \hline \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right] \\ & s \{ & \\ & n - m - s \{ & \end{matrix} \quad (3.5)$$

Les direccions  $p \in \mathbb{R}^n$  que conserven l'activitat de (3.4) queden caracteritzades per :

$$p = Zp_z \quad ; \quad \begin{bmatrix} p_{\mathcal{B}} \\ - \\ p_{\mathcal{S}} \\ - \\ p_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}Sp_z \\ \hline p_z \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \forall p_z \in \mathbb{R}^s \quad (3.6)$$

Si  $x$  és no degenerada, aleshores qualsevol  $p$  calculada segons (3.6) és factible respecte a  $\Omega_{NCL}$ . En presència de degeneració (3.6) pot provocar passes degenerades ( $\bar{\alpha} = 0$ ). Tenint en compte (3.6) , el càlcul de direccions factibles de descens respecte a **(NCL)** que conservin l'activitat de (3.4) queda reduït al càlcul de direccions de descens del *subproblema a l'espai nul de  $\bar{M}$*  definit com :

$$(\text{SN}\bar{M}) \left\{ \min_{y \in \mathbb{R}^s} f_z(y) = f(x + Z(y - x_s)) \right\} \quad (3.7)$$

Sigui  $g_z(x) = Z'g(x)$  i  $H_z(x) = Z'H(x)Z$  el *gradient reduït* o *projectat* i l'*Hessità reduït* o *projectat* de  $f$  a  $x$  respectivament. Llavors, es poden obtenir direccions de descens de  $(\text{SN}\bar{M})$  resolent el sistema :

$$\tilde{H}_z p_z = -g_z(x) \quad (3.8)$$

on  $\tilde{H}_z$  és l'hessità reduït  $H_z(x)$ , si aquest és definit positiu, o una aproximació de  $H_z(x)$  definida positiva. S'ha de fer notar que l'interés en el subproblema  $(\text{SN}\bar{M})$  no és tant en la seva resolució com en el càlcul d'una direcció de descens. Un cop calculada  $p_z$  a través de (3.8) s'ha de procedir a realitzar exploració lineal de  $f$  a partir de  $x$  al llarg de la direcció  $Zp_z$  amb longitud de pas limitada pel valor  $\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_{\mathcal{B}}, \bar{\alpha}_{\mathcal{S}}\}$  imposat per les fites de les variables bàsiques i superbàsiques :

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{B}} = \min_{i \in \mathcal{B}} \{ \{-x_i/p_i : p_i < 0\}, \{(u_i - x_i)/p_i : p_i > 0\} \} \quad (3.9)$$

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{S}} = \min_{i \in \mathcal{S}} \{ \{-x_i/p_i : p_i < 0\}, \{(u_i - x_i)/p_i : p_i > 0\} \} \quad (3.10)$$

Si el resultat de l'exploració lineal és  $\alpha^* = \bar{\alpha}$  aleshores s'ha de modificar la partició definida pels conjunts  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{N}$ , canviant conseqüentment la matriu  $\bar{M}$  i la definició del subproblema  $(\text{SN}\bar{M})$ .

### 3.1.4 Condicions d'optimalitat de (NCL)

Consideri's una solució  $x_M^* \in \Omega_{NCL}$  punt estacionari de  $(\text{SN}\bar{M})$ . Sobre  $x_M^*$  es satisfan les condicions necessàries de primer ordre de mínim local del subproblema  $(\text{SN}\bar{M})$  :

$$x_M^* \in \Omega_{NCL} \text{ punt estacionari de } (\text{SN}\bar{M}) \Rightarrow g_z(x_M^*) = Z'g(x_M^*) = 0 \quad (3.11)$$

Si  $H_z(x_M^*)$  és definida positiva, llavors  $x_M^*$  serà un mínim local de  $(\text{SN}\bar{M})$ . A partir d'un punt com aquest no és possible el càlcul de direccions factible i de descens de **(NCL)** segons la metodologia descrita a l'anterior secció, basada en la resolució del sistema (3.8). Devant d'aquesta situació, el càlcul de direccions factibles de descens, si existeixen, passa per l'estudi de les condicions d'optimalitat de **(NCL)**.

Donada una solució factible de **(NCL)**  $x$ , les condicions necessàries de primer ordre de mínim local de **(NCL)**, o *condicions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*, estableixen que si  $x$  és mínim local de **(NCL)** aleshores existeixen  $\pi^* \in \mathbb{R}^m$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}^* \in \mathbb{R}^{(n-m-s)}$  tals que :

$$i) \quad \bar{M}' \begin{bmatrix} \pi^* \\ \sigma_{\mathcal{N}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & \mathbf{0} \\ S' & \mathbf{0} \\ N' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi^* \\ \sigma_{\mathcal{N}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{g(x)_{\mathcal{B}}} \\ \overline{g(x)_{\mathcal{S}}} \\ \overline{g(x)_{\mathcal{N}}} \end{bmatrix} \quad (3.12a)$$

$$ii) \quad \sigma_{\mathcal{N}_i}^* \geq 0, \quad \forall \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_0 \quad (3.12b)$$

$$\sigma_{\mathcal{N}_i}^* \leq 0, \quad \forall \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_u \quad (3.12c)$$

Sobre un vector  $x \in \Omega_{NCL}$  on el sistema expressat a (3.12a) sigui compatible, la resolució del sistema (3.12a) proporciona :

$$B' \pi = g(x)_{\mathcal{B}} \quad ; \quad \pi' = g(x)_{\mathcal{B}}' B \quad (3.13a)$$

$$N' \pi + \sigma_{\mathcal{N}} = g(x)_{\mathcal{N}} \quad ; \quad \sigma_{\mathcal{N}}' = g(x)_{\mathcal{N}}' - \pi' N \quad (3.13b)$$

$$S' \pi = g(x)_{\mathcal{S}} \quad ; \quad g(x)_{\mathcal{S}} - S' \pi = 0 \quad (3.13c)$$

Les equacions (3.13a) i (3.13b) poden ésser emprades per a calcular uns vectors  $\pi$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}$  a qualsevol solució  $x \in \Omega_{NCL}$ , però només si  $x$  es punt estacionari de **(SNM)** es satisfan les equacions (3.13c). Així doncs, els vectors  $\pi$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}$  només representaran una estimació dels multiplicadors de Lagrange  $\pi^*$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}^*$  si es calculen sobre  $x_M^*$ .

Consideri's  $x_M^* \in \Omega_{NCL}$  punt estacionari de **(SNM)** on els signes de les components del vector  $\sigma_{\mathcal{N}}$  calculat segons (3.13b) viola alguna de les condicions (3.12b) o (3.12c). Sigui  $i$  l'índex d'una d'aquestes components. Aleshores es pot millorar el valor de la funció objectiu mitjançant una pertorbació  $p$  de  $x_M^*$  tal que conservi actives totes les fites actives a  $x_M^*$ , i desactivi la fita associada a  $\mathcal{N}_i$ , és a dir :

$$\bar{M}p = \begin{cases} +e_{m+i}^{n-s} & \text{si } \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_0 \\ -e_{m+i}^{n-s} & \text{si } \mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_u \end{cases} \quad (3.14)$$

on  $e_{m+i}^{n-s}$  indica el vector unitari  $(m+i)$ -èssim de dimensió  $(n-s)$ . Sigui  $q = \mathcal{N}_i$  l'índex de la variable no bàsica associada al multiplicador  $\sigma_{\mathcal{N}_i}$  que viola (3.12b) o (3.12c). Sobre  $x_M^*$  es realitza la següent actualització de la partició del vector de variables  $x$  :

$$\mathcal{B} := \mathcal{B} \quad , \quad \mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{q\} \quad ; \quad s := s + 1 \quad ; \quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\}$$

L'actualització de la partició de variables defineix una nova matriu de constriccions actives  $\bar{M}$  i un nou subproblema  $(\text{SN}\bar{M})$ , on la darrera component del vector de variables  $p_z$  correspon ara a la variable  $q$ . Una passa del tipus  $p_z = \begin{cases} +e_s^s & \text{si } x_{s_s} = 0 \\ -e_s^s & \text{si } x_{s_s} = u_{s_s} \end{cases}$  és de descens respecte al nou subproblema  $(\text{SN}\bar{M})$ .

### 3.1.5 Algorisme del Conjunt de Constriccions Actives.

El següent algorisme recull l'estrategia de resolució de **(NCL)** desenvolupada al llarg del present capítol :

**Algorisme A3.1** : Algorisme del Conjunt de Constriccions Actives.

**0** **Inicialització de l'algorisme :**

Donat  $x^0 \in \Omega_{NCL}$  es defineixen :

$$\mathcal{B}^0 ; \mathcal{S}^0 ; \mathcal{N}^0 ; (\text{SN}\bar{M})^0$$

$$Z^0 ; g_z^0 := Z^{0'}g(x^0) ; H_z^0 := Z^{0'}H(x^0)Z^0 ; k := 0.$$

**1** **Comprovació de les condicions d'optimalitat de  $(\text{SNM})$  :**

Si  $\|g_z^k\|_2 = 0 \Rightarrow x^k = x_{\bar{M}}^{*k}$  : anada a **2**.

Si  $\|g_z^k\|_2 \neq 0 \Rightarrow x^k \neq x_{\bar{M}}^{*k}$  : anada a **3**.

**2**  $x^k = x_{\bar{M}}^{*k}$  : **comprovació de les condicions d'optimalitat de  $(\text{NCL})$  :**

**2.1** Càlcul de  $\sigma_{\mathcal{N}}^{k'} = g_{\mathcal{N}}^{k'} - \pi^{k'}N^k$ .

**2.2** Si  $\exists q \in \mathcal{N}_0^k$  tq  $\sigma_q^k < 0$  ó  $\exists q \in \mathcal{N}_u^k$  tq  $\sigma_q^k > 0$  llavors :

$$\mathcal{B}^{k+1} := \mathcal{B}^k ; \mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \cup \{q\} ; \mathcal{N}^{k+1} := \mathcal{N}^k \setminus \{q\}.$$

Actualització  $(\text{SN}\bar{M})^k$ .

Anada a **3**.

Altrament, anar a **4**.

**3**  $x^k \neq x_{\bar{M}}^{*k}$  : **iteració a  $(\text{SN}\bar{M})^k$  :**

**3.1** **Càlcul d'una direcció factible de descens :**

$$\text{Resolució de } H_z^k p_z^k = -g_z^k ; p^k := Z^k p_z^k.$$

**3.2** **Càlcul de la passa màxima :**  $\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_{\mathcal{B}}, \bar{\alpha}_{\mathcal{S}}\}$ .

**3.3** **Exploració lineal :**  $\alpha^{*k} = \operatorname{argmin}_{0 < \alpha \leq \bar{\alpha}} \{f(x^k + \alpha p^k)\}$ .

**3.4** **Actualització del punt iterat :**

$$x^{k+1} := x^k + \alpha^{*k} p^k.$$

$$g_z^{k+1} := Z^{k+1'} g(x^{k+1}).$$

$$H_z^{k+1} := Z^{k+1'} H(x^{k+1}) Z^{k+1}.$$

**3.5** **Pivotació** : si  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}$  llavors:

Si  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}_B$  :

Seleccionar  $l \in \mathcal{S}$  acceptable per a pivotar.

$$\mathcal{B}^{k+1} := \mathcal{B}^k \setminus \{p\} \cup \{l\} \quad ; \quad \mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \setminus \{l\} \quad ; \quad \mathcal{N}^{k+1} := \mathcal{N}^k \cup \{p\}.$$

Si  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}_S$  :

$$\mathcal{B}^{k+1} := \mathcal{B}^k \quad ; \quad \mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \setminus \{p\} \quad ; \quad \mathcal{N}^{k+1} := \mathcal{N}^k \cup \{p\}.$$

Actualització de  $(\text{SNM})^k : Z^{k+1}$

**3.6**  $k := k + 1$ . Anada a **1**.

**4** **Acabament** :  $x^k = x_M^{*k}$  i satisfà (3.12b) i (3.12c)  $\Rightarrow$   $x^k$  òptim de **(NCL)**.

Es necessari fer alguns comentaris sobre l'ús de l'Hessià projectat  $H_z^k$ . El disseny de la versió especialitzada de l'algorisme que es presentarà als següents capítols considera que les segones derivades de la funció objectiu no estan disponibles. Això provoca que, en realitat, a les passes de l'algorisme A3.1 on s'indiqui  $H_z^k$  s'hagi de considerar que s'està fent referència a una certa aproximació de  $H_z^k$ . D'altra banda, el fet de no disposar de les segones derivades fa que les comprovacions d'optimalitat es limitin a assegurar les condicions necessàries de primer ordre si no es disposa d'informació addicional sobre la convexitat de  $f$ .

## 3.2 Fluxos lineals en xarxes amb constriccions a banda. Problema (FLCL) .

Recordem que a la secció 2.4 s'ha definit la forma estàndard del problema de fluxos lineals amb constriccions a banda (**FLCL**) com :

$$\begin{array}{l}
 \text{(FLCL)} \left\{ \begin{array}{ll}
 \min & c'x \quad (2.2a) \quad c, x \in \mathbb{R}^n \\
 \text{subj. to :} & Ax = r \quad (2.2b) \quad A \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{n}}, r \in \mathbb{R}^m \\
 & Tx + \mathbf{I}_z z = b \quad (2.2c) \quad T \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{n}}, \text{rang}(T) = t \\
 & 0 \leq x \leq u_x \quad (2.2d) \quad u_x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \\
 & 0 \leq z \leq u_z \quad (2.2e) \quad b \in \mathbb{R}^t, z, u_z \in \mathbb{R}^{\tilde{t}} \\
 & u_{x\tilde{n}} = 0 \quad (2.2f) \quad \mathbf{I}_z \in \mathbb{R}^{t \times \tilde{t}}
 \end{array} \right. ;
 \end{array}$$

Noti's que les constriccions que defineixen el conjunt factible de **(FNCL)** i **(FLCL)** coincideixen. Per tant, els resultats presentats dins d'aquesta secció, i que afecten a les bases de **(FLCL)**, són completament extrapolables a les bases de **(FNCL)**.

### 3.2.1 Resolució de sistemes lineals amb la matriu $B$ .

La matriu de constriccions del problema **(FLCL)** és :

$$M = \begin{array}{l} m \{ \\ t \{ \end{array} \left[ \begin{array}{cc} \overbrace{A}^{\tilde{n}} & \overbrace{\mathbf{0}}^{\tilde{t}} \\ T & \mathbf{I}_z \end{array} \right] \quad (3.15)$$

Les tres proposicions següents caracteritzen les bases de la matriu  $M$  :

**Proposició 3.1 :** qualsevol base de  $M$  pot ser expressada en la següent forma :

$$B = \begin{array}{l} m \{ \\ t \{ \end{array} \left[ \begin{array}{cc} \overbrace{M_B}^m & \overbrace{M_C}^t \\ M_D & M_F \end{array} \right] \quad (3.16)$$

on  $M_B$  és una submatriu no singular de  $A$ .

**Proposició 3.2 :** Si  $B$  és invertible i  $M_B$  és invertible, aleshores la matriu  $M_F - M_D M_B^{-1} M_C$  és invertible.

**Proposició 3.3 :** Si  $B$  és invertible i  $M_B$  és invertible, aleshores :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} M_B^{-1} + M_B^{-1} M_C Q^{-1} M_D M_B^{-1} & -M_B^{-1} M_C Q^{-1} \\ -Q^{-1} M_D M_B^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

on  $Q \in \mathbb{R}^{t \times t}$  és l'anomenada *base de treball* definida segons :

$$Q = M_F - M_D M_B^{-1} M_C$$

La matriu  $Q$  també es coneix com a *complement de Schurz de la matriu  $M_B$  a  $B$* . Les columnes de la matriu bàsica  $B$  associades a les columnes de les submatrius  $\begin{bmatrix} M_B \\ M_D \end{bmatrix}$  s'anomenen *columnes clau*, mentre que les columnes associades a  $\begin{bmatrix} M_C \\ M_F \end{bmatrix}$  es coneixen com a *columnes no clau*. Per extensió es parlarà també de variables clau i variables no clau, indicant amb  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$  el conjunt d'índexos de les variables clau i no clau respectivament :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{i \in \mathcal{B} : \text{associats a } M_B\} \\ \mathcal{C} &= \{i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La proposició P3.3 és la clau per a la resolució eficient dels sistemes d'equacions  $Bw = v$  i  $w'B = v'$  implicats en el càlcul de les iteracions de l'algorisme del símplex. Considerem el sistema  $Bw = v$ . Separarem les components del vector solució  $w$  segons estiguin associades a variables clau ( $w_{\mathcal{A}}$ ) o no clau ( $w_{\mathcal{C}}$ ). Les components del terme independent  $v$  poden estar associades a les equacions de xarxa ( $v_{\mathcal{A}}$ ) o a les constriccions a banda ( $v_{\mathcal{T}}$ ) :

$$w = \begin{matrix} m \{ \\ t \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ - \\ w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} ; \quad v = \begin{matrix} m \{ \\ t \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} v_{\mathcal{A}} \\ - \\ v_{\mathcal{T}} \end{bmatrix}$$

La solució al sistema  $Bw = v$  es pot calcular de forma eficient aprofitant la partició de  $B$  indicada a (3.16) :

$$w = \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ - \\ w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_{\mathcal{A}} \\ - \\ v_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_B^{-1} (v_{\mathcal{A}} + M_C Q^{-1} M_D M_B^{-1} v_{\mathcal{A}} - M_C Q^{-1} v_{\mathcal{T}}) \\ Q^{-1} (v_{\mathcal{T}} - M_D M_B^{-1} v_{\mathcal{A}}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

introduint els vectors auxiliars  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , el càlcul de  $x$  segons (3.19) es pot du a terme mitjançant el següent algorisme :

**Algorisme A3.2** : Càlcul de  $w = B^{-1}v$

- 1**  $\gamma_1 \xleftarrow{F.X.} M_B^{-1}v_A$
- 2**  $\gamma_2 \leftarrow v_A + M_C Q^{-1} M_D \gamma_1 - M_C Q^{-1} v_T$
- 3**  $w_A \xleftarrow{F.X.} M_B^{-1} \gamma_2$
- 4**  $w_c \leftarrow Q^{-1} (v_T - M_D \gamma_1)$

La matriu  $M_B$ , d'acord amb la proposició P3.1 , és la base d'un problema pur de fluxos en xarxes definit per les equacions (2.2a), (2.2b), (2.2d) i (2.2f). Les bases dels problemes de fluxos lineals estan associades a arbres generadors del graf  $\mathcal{G}$  (Proposició 3.15 [51]). Aquest fet motiva que els sistemes d'equacions implicats a les passes **1** i **3** puguin ésser resolts mitjançant tècniques especialitzades de fluxos en xarxes, tal com indica el símbol  $\xleftarrow{F.X.}$ . Si  $v_A$  correspon a una columna  $a_q$  de la matriu  $A$ , el vector  $\gamma_1$  de la passa **1** es pot expressar (equació (3.5) de [51]), com :

$$\gamma_{1i} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } i \in \overset{\circ}{q} \\ 0 & \text{si } i \notin \overset{\circ}{q} \end{cases} \quad (3.20)$$

El símbol  $\overset{\circ}{q}$  indica els arcs del cicle basic de  $q$  i el signe dels elements no nuls depén de l'orientació de l'arc clau  $i$  dins el cicle. El càlcul de  $\gamma_1$  es pot fer explotant l'estructura de dades que descriu l'arbre generador de  $\mathcal{G}$  associat a  $M_B$ , seguint, per exemple, l'algorisme FAPColumn, pàg. 92 de [37]. Si  $v_A$  és un vector dens, l'estructura de dades que descriu l'arbre generador associat a  $M_B$  també es pot aprofitar per a realitzar les passes **1** i **3** de forma eficient ( per exemple, algorisme 7.2 de [51]). L'algorisme A3.2 permet calcular la columna d'elements pivotals de la variable no bàsica d'entrada a la base si aquesta variable és un arc. Si la variable és una folga, l'algorisme A3.2 es transforma en :

**Algorisme A3.3** : Càlcul de  $w = B^{-1} [0 \quad | \quad vt]'$

- 1**  $w_c \leftarrow Q^{-1} v_T$
- 2**  $\gamma \leftarrow -M_C w_c$
- 3**  $w_A \xleftarrow{F.X.} -M_B^{-1} \gamma$

Fixem-nos ara en el sistema  $w'B = v'$ , on les components del vector solució  $w$  estan associades a constriccions i les del vector de termes independents  $v$  a variables. Aquest



sistema està implicat en el càlcul de les variables duals, i es pot resoldre fent :

$$\begin{aligned} w' &= [w'_A \mid w'_T] = [v'_A \mid v'_c] B^{-1} = \\ &= \left[ (v'_A + v'_A M_B^{-1} M_C Q^{-1} M_D - v'_c Q^{-1} M_D) M_B^{-1} \mid (v'_c - v'_A M_B^{-1} M_C) Q^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

introduint els vectors auxiliars  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ , les operacions indicades a (3.21) es poden calcular com :

**Algorisme A3.4:** Càlcul de  $[w'_A \mid w'_T] = [v'_A \mid v'_c] B^{-1}$

- 1  $\gamma_1 \xleftarrow{F.X.} v'_A M_B^{-1}$
- 2  $\gamma_2 \leftarrow v'_A + \gamma_1' M_C Q^{-1} M_D - v'_c Q^{-1} M_D$
- 3  $w_A \xleftarrow{F.X.} \gamma_2' M_B^{-1}$
- 4  $w_T \leftarrow (v'_c - \gamma_1' M_C) Q^{-1}$

Tal com passava als anteriors algorismes, aquest es pot beneficiar de l'estructura de dades que descriu  $M_B$  resolent les passes 1 i 3 amb procediments especialitzats (per exemple, Algorisme 3.2 de [51]).

Procedint segons indiquen els algorismes A3.2 , A3.3 i A3.4 la resolució dels sistemes d'equacions  $Bw = v$  i  $w'B = v'$  de dimensió  $m + t$  es redueix a :

- 1.- la resolució de sistemes d'equacions amb la matriu  $M_B$ , base d'un problema pur de fluxos en xarxes, que poden ésser resolts de forma eficient a través de l'estructura de dades que descriu l'arbre generador associat a  $M_B$ .
- 2.- la resolució de sistemes d'equacions amb la base de treball  $Q$ , de dimensió  $t \times t$ .

aquest fet permet dissenyar implementacions eficients de l'algorisme del símplex per a resoldre el problema (FLCL).

### 3.2.2 Actualització de la inversa de la base de treball.

Es descriurà ara el procediment d'actualització de la inversa de la base de treball després d'una pivotació del símplex. Donat que tant l'estructura de la base com els casos de pivotació són els mateixos que en el problema (FNCL), el procediment d'actualització

que es presentarà, i que prové de [51], serà totalment extrapolable al problema **(FNCL)**, tret d'alguns aspectes que depenen del detall de la implementació feta.

Consideri's la transformació pivotal consistent en l'intercanvi de la p-èsima variable bàsica  $\mathcal{B}_p \in \mathcal{B}$  amb la variable no bàsica  $q \in \mathcal{N}$  :

$$\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{p\} \cup \{q\}$$

De la teoria bàsica de la programació lineal es coneix que l'expressió que permet actualitzar la inversa de la matriu bàsica sota una transformació d'aquest tipus és :

$$[B^{-1}]^{k+1} := E[B^{-1}]^k \tag{3.22}$$

on  $E$  és la matriu eta amb vector eta col·locat a la columna  $p$  i format a partir del vector  $y_q = B^{-1}m_q$ . En el cas del particionament primal la pivotació realitzada ha d'ésser tal que es conservi la partició de la base en columnes clau i columnes no clau, la qual cosa pot fer necessària una reordenació prèvia de la matriu  $B$  amb un intercanvi entre la columna  $p$  i una columna  $l$  de  $B$  :

$$[B]^{k+1} := [B]^k P_{pl} \quad \Rightarrow \quad [B^{-1}]^{k+1} := P_{pl}[B^{-1}]^k \tag{3.23}$$

on  $P_{pl}$  és la matriu elemental de permutació de les files/columnes  $p$  i  $l$ . Si indiquem per  $E$  tant la matriu eta de (3.22) com la matriu permutació  $P_{pl}$ , la fórmula d'actualització es pot expressar, particionant la matriu  $E$  de forma consistent amb la partició de  $B^{-1}$  :

$$[B^{-1}]^{k+1} := E[B^{-1}]^k = \begin{matrix} m \\ t \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}}^m \end{matrix} \right\} [B^{-1}]^k \tag{3.24}$$

Es pot demostrar (apèndix E, [51]) que, donada (3.24) a , la fórmula d'actualització de la inversa de la base de treball  $Q^{-1}$  és :

$$[Q^{-1}]^{k+1} := (E_4 - E_3[M_B^{-1}]^k[M_C]^k)[Q^{-1}]^k \tag{3.25}$$

Es poden donar els següents casos d'actualització de  $B^{-1}$  :

**1.- La columna no clau  $p$  surt de la base**

En aquests cas,  $E_3 = [\mathbf{0}]$ . Substituint a (3.25) s'obté :

$$[Q^{-1}]^{k+1} = E_4[Q^{-1}]^k \quad (3.26)$$

**2.- La columna clau  $p$  surt de la base.**

2.1.- Si existeix un arc no clau  $l$  que formi cicle amb  $p$ , s'intercanvien les columnes de  $[B]^k$  associades a  $p$  i  $l$  mitjançant una matriu de permutació  $P_{pl}$ , el que provoca una actualització de  $[B^{-1}]^k$  amb  $E = P_{pl}$ . Substituint a (3.25) i operant s'obté :

$$[Q^{-1}]^{k+1} = E_5[Q^{-1}]^k \quad (3.27)$$

on  $E_5$  és la matriu fila :

$$E_5 = l \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline & -e'_p M_B^{-1} M_C & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Un cop fet aquest intercanvi s'aplica el cas 1.

2.2.- Si no existeix cap arc no clau  $l$  que formi cicle amb l'arc sortint  $p$ , llavors es satisfà que  $[M_B^{-1}]^k [M_C]^k = [\mathbf{0}]$ . Tenint en compte que  $E_4 = \mathbf{I}$ , de (3.25) es conclou que :

$$[Q^{-1}]^{k+1} = [Q^{-1}]^k \quad (3.28)$$

### 3.2.3 Actualització de la inversa de $M_B$ .

Quan es realitza una pivotació que implica la sortida de la base de una variable clau es produeix un canvi en l'arbre generador associat a  $M_B$ , canviant consegüentment la inversa  $M_B^{-1}$ . L'actualització de  $M_B^{-1}$  es redueix a l'actualització de l'estructura de dades que descriu l'arbre generador associat a  $M_B$ , seguint, per exemple, el procediment descrit a l'article de Grigoriadis [37].

### 3.3 Referències.

La justificació de les diferents parts de l'algorisme A3.1 poden trobar-se al text de Gill, Murray i Wright [33], seccions 5.2 i 5.6, així com a diversos articles, a destacar l'article original de Murtagh i Saunders [59]. L'espai nul  $N_{\bar{M}}$  està caracteritzat a [33], capítol 2, secció 2.2.2 i també al text de Luenberger [55], pàg. 297 i següents, i les seves bases  $Z$  a [33] secció 5.1.3. El text de Kennington i Helgason [51] representa una excel·lent síntesi dels treballs anteriors sobre fluxos lineals amb constriccions a banda. La caracterització de les bases del problema **(FLCL)** provenen de [51], capítol 7, on també poden trobar-se les demostracions de les proposicions P3.1, P3.2 i P3.3, i els algorismes A3.2, A3.3 i A3.4. El detall dels resultats sobre l'actualització de la base de treball poden trobar-se al capítol 7 i a l'apèndix E de [51]. Exposicions detallades de la teoria de fluxos en xarxes que sustenta el tractament especialitzat de les operacions indicades amb  $\overleftarrow{F.X.}$  poden trobar-se a nombrosos llibres i articles de l'àrea. Destaquem l'article de Bradley, Brown i Graves [7] i el mateix text de Kennington i Helgason [51] en el seu capítol 3.

## CAPÍTOL 4

### Explotació de l'estructura del problema (FNCL).

#### 4.1 Estructura del problema (FNCL) .

L'objectiu d'aquest apartat és estendre els resultats presentats a la secció 3.2 sobre l'estructura de la matriu de constriccions del problema (**FLCL**) al cas de fluxos no lineals on, degut a la presència de variables superbàsiques, s'haurà de considerar una partició de la matriu de constriccions com la definida a (3.2).

Sigui el problema (**FNCL**) definit a (2.1a)–(2.1f). La matriu de constriccions del problema (**FNCL**) coincideix amb la definida a (3.15) pel problema de fluxos lineals amb constriccions a banda :

$$M = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{1cm}}^{\tilde{n}} & \overbrace{\hspace{1cm}}^{\tilde{t}} \\ m \{ & \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ T & \mathbf{I}_z \end{bmatrix} \\ t \{ & \end{matrix} \quad (4.1)$$

El vector de variables de (**FNCL**) està format pels  $\tilde{n}$  arcs de la xarxa i les  $\tilde{t}$  folgues de les constriccions de desigualtat :

$$y = \begin{bmatrix} x \\ - \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\tilde{n}+\tilde{t})} \quad (4.2)$$

Segons aquesta notació, la folga  $j$ -èssima correspon a la variable  $(\tilde{n} + j)$ -èssima, és a dir,  $y_{\tilde{n}+j} = z_j$ . S'indicarà amb  $\Omega_{FNCL}$  la regió factible de (**FNCL**) :

**Definició 4.1** :  $\Omega_{FNCL} = \{y \in \mathbb{R}^{(\tilde{n}+\tilde{t})} \text{ tq satisfan (2.1b)–(2.1f)} \}$

### 4.1.1 Estructura de les matrius $S$ i $N$ .

Sobre una solució factible qualsevol  $y \in \Omega_{FNCL}$  s'aplicarà la partició en variables bàsiques, superbàsiques i no bàsiques definida a la secció 3.1.1. Sobre els conjunts  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{N}$  es definirà una nova partició que expressarà la divisió de  $y$  en fluxos i folgues exhibida a (4.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x &= \{i \in \mathcal{S} : i \leq \tilde{n}\} & \mathcal{S}_z &= \{i \in \mathcal{S} : i > \tilde{n}\} \\ \mathcal{N}_x &= \{i \in \mathcal{N} : i \leq \tilde{n}\} & \mathcal{N}_z &= \{i \in \mathcal{N} : i > \tilde{n}\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Atenent l'estructura de  $M$  exhibida a (4.1) i la partició de  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{N}$  acabada de definir, l'estructura de les matrius  $S$  i  $N$  de la partició (3.2) pel problema (FNCL) és :

$$S = \begin{array}{cc|c} & s_x & s_z & \\ \hline & A_S & \mathbf{0} & m \\ \hline & T_S & \mathbf{I}_S & t \end{array} ; \quad N = \begin{array}{cc|c} & |\mathcal{N}_x| & |\mathcal{N}_z| & \\ \hline & A_N & \mathbf{0} & m \\ \hline & T_N & \mathbf{I}_N & t \end{array} \quad (4.4)$$

on  $s_x = |\mathcal{S}_x|$ ,  $s_z = |\mathcal{S}_z|$  i les diferents submatrius de  $S$  i  $N$  es defineixen segons :

$A_S, T_S$  : submatrius de  $A$  i  $T$  formades per les columnes corresponents als arcs de  $\mathcal{S}_x$ .

$A_N, T_N$  : submatrius de  $A$  i  $T$  formades per les columnes corresponents als arcs de  $\mathcal{N}_x$ .

$\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_N$  : submatrius de  $\mathbf{I}_z$  formades per les columnes corresponents a folgues de  $\mathcal{S}_z$  i  $\mathcal{N}_z$  respectivament.

### 4.1.2 Estructura de la matriu $B$ .

Fixem-nos ara en la matriu bàsica  $B$  formada amb les columnes de  $M$  associades a les variables de  $\mathcal{B}$ . Conforme a la proposició P3.1 qualsevol base  $B$  de  $M$  pot ésser expressada com :

$$B = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{1cm}}^m & \overbrace{\hspace{1cm}}^t \\ m \{ & \begin{bmatrix} M_B & M_C \\ M_D & M_F \end{bmatrix} & \\ t \{ & & \end{matrix} \quad (4.5)$$

on  $M_B$  és una base de les equacions de xarxa (2.1b). Aquesta estructura interna de  $B$  porta a una partició del conjunt  $\mathcal{B}$  en dos conjunts  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$  d'índexos de variables clau i variables no clau, tal com s'ha definit a la secció 3.2.1. Dins d'aquest darrer conjunt distingirem entre els índexos corresponents a arcs i a folgues :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_z \quad ; \quad \begin{cases} \mathcal{C}_x = \{i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} : y_i \text{ és arc}\} \\ \mathcal{C}_z = \{i \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A} : y_i \text{ és folga}\} \end{cases} \quad (4.6)$$

Així doncs, el conjunt  $\mathcal{A}$  es compon dels arcs bàsics que formen l'arbre generador de la xarxa associat a la matriu  $M_B$ . El conjunt  $\mathcal{C}_x$  estarà format per arcs bàsics que no formen part de l'arbre associat a  $\mathcal{A}$ . Seguint la nomenclatura introduïda a [51], els arcs inclosos a  $\mathcal{A}$  s'anomenaran *arcs clau*, mentre que els pertanyents a  $\mathcal{C}_x$  s'anomenaran *arcs no clau*. Per extensió es parlarà també de columnes clau i no clau. Finalment, el conjunt  $\mathcal{C}_z$  està format per les folgues bàsiques. D'acord amb la partició  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_z$ , l'estructura interna de les bases de (FNCL) queda :

$$B = \begin{matrix} & m & t & & & \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & & & \\ & M_B & M_C & m & & \\ & \hline & & = & & \\ & M_D & M_F & t & & \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & & & & \end{matrix} \quad (4.7)$$

	$m$	$t$			
$B =$	$M_B$	$M_C$	$m$	$=$	
	$M_D$	$M_F$	$t$		

	$m$	$c_x$	$c_z$		
	$A_A$	$A_c$	$\mathbf{0}$	$m$	
	$T_A$	$T_c$	$\mathbf{I}_c$	$t$	

on  $c_x = |\mathcal{C}_x|$ ,  $c_z = |\mathcal{C}_z|$ . L'expressió de  $B^{-1}$  proporcionada per la proposició P3.3 segons la notació usada a (4.7) és :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{A}}^{-1} + A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_c|\mathbf{0}]Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1} & -A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_c|\mathbf{0}]Q^{-1} \\ -Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

i l'expressió de la base de treball és :

$$Q = [T_c \quad | \quad \mathbf{I}_c] - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_c|\mathbf{0}] \quad (4.9)$$

## 4.2 Algorismes especialitzats de càlcul matricial.

Totes les operacions matricials implicades a l'algorisme A3.1 es poden beneficiar de l'estructura de les matrius  $B$ ,  $S$  i  $N$  descrita a les seccions 4.1.1 i 4.1.2. Certs procediments d'explotació de l'estructura de la base de (FNCL) ja han estat descrits als algorismes A3.2, A3.3 i A3.4 tal com van ésser proposats per Kennington i Helgason [51]. No obstant, es proposaran en aquest treball noves versions d'aquests algorismes on s'explota d'una forma més eficient l'estructura de xarxa del problema. A més, es descriuran els procediments especialitzats de càlcul de les operacions matricials on es veuen implicades les matrius  $S$  i  $Z$ , i que són específiques del problema de fluxos no lineals amb constriccions a banda. Aquests darrers procediments no ha estat descrits fins ara.

### 4.2.1 Cost computacional i precisió.

Dins del camp de la computació matemàtica s'acostuma a associar el cost computacional d'un algorisme numèric al nombre d'operacions de coma flotant que realitza. Chvátal ([14], capítol 7) compara el temps d'execució del mètode del símplex estàndard i revisat símplex revisat calculant les operacions que es realitzen a cada iteració. Duff et al. ([27], pàgs. 57-58) calculen el cost computacional de l'eliminació de Gauss i de Gauss-Jordan a través del còmput del nombre d'operacions. Aquests procediments es basen en el fet que,



en computadores amb processadors escalars<sup>2</sup>, el temps d'execució de la implementació d'un algorisme numèric es pot aproximar adequadament per l'expressió [27] :

$$\text{temps d'execució} = K \times \text{nombre d'operacions de coma flotant} \quad (4.10)$$

on  $K$  és el temps promig per operació. Aquesta expressió es basa en la hipòtesi de que el temps de la resta d'instruccions executades pel processador (assignacions, comparacions, etc.) són menystenibles o proporcionals respecte al temps computacional de les instruccions que realitzen les operacions aritmètiques. L'experiència indica que el cost dels dos tipus d'instruccions –aritmètiques (IA) i no aritmètiques (INA)– és comparable. Proves computacionals realitzades sobre un computador SUN Sparc 10/41 amb un únic processador escalar d'arquitectura risc mostren que, prenent com a unitat el temps d'una addició  $A+B$  amb  $A$  i  $B$  declarades `REAL*8`, el cost de l'assignació de reals  $A=B$  és 0.5 i el de la comparació `I.EQ.0` amb `I INTEGER*4` oscil·la entre 0.5 i 0.7. Aquest fet fa que la comparació de l'eficiència de dos algorismes basada en una comparació directa del nombre d'operacions no sigui vàlida, doncs el temps computacional de les INA de tractament de les estructures de dades pot ser tant o més important com el de les IA. No obstant això, si per un cert algorisme  $A^*$  es satisfà que :

- 1.- El temps d'execució d'una qualsevol de les INA és del mateix ordre que el temps d'execució d'una IA.
- 2.- El nombre de INA és, bàsicament, proporcional al nombre de IA.

aleshores, l'expressió (4.10) és un bon indicador del cost computacional. Sota aquestes hipòtesis, si indiquem per  $n$  el nombre d'operacions de coma flotant de l'algorisme  $A^*$ , llavors el cost computacional, o temps d'execució, de  $A^*$  es pot expressar com :

$$\text{cst}(A^*) = \kappa(A^*) \times n \quad (4.11)$$

on  $\kappa(A^*)$  representa el temps total d'execució de totes les instruccions que la implementació de l'algorisme  $A^*$  necessiti per executar una de les  $n$  operacions aritmètiques. És clar que la comparació del cost computacional de dos algorismes és difícil, doncs la seva eficiència relativa depèn dels valors de les constants  $\kappa$ , valors que són funció de factors tant diversos

---

<sup>2</sup> processador escalar s'usa aquí en contraposició a processador vectorial i a les arquitectures en paral·lel.

com la sintaxi de la rutina que implementa l'algorisme, el processador sobre el que s'executi el codi compilat, el compilador i, fins i tot, les opcions de compilació.

Un dels problemes més difícils d'abordar en la implementació de l'algorisme descrit en aquesta tesi ha estat la cerca de procediments de càlcul que, a banda d'ésser computacionalment eficients, minimitzessin els errors de cancel·lació inherents al treball amb aritmètica finita dels ordinadors. La importància d'aquests errors numèrics augmenta a mida que ho fa la dimensió dels models a resoldre, éssent el seu tractament un problema ineludible si es pretén desenvolupar implementacions robustes d'algorismes d'optimització de models de gran escala. El control de certs errors numèrics s'ha intentat aconseguir, d'una banda, amb un disseny acurat dels algorismes de càlcul de les operacions matricials, el qual intenta minimitzar els errors presents a les solucions calculades i, d'altra banda, amb l'establiment d'un sistema posterior d'estimació i filtratge dels errors numèrics presents a aquestes solucions. Afortunadament, com es veurà al llarg d'aquest capítol, l'explotació de l'estructura del problema (**FNCL**) permet establir procediments de càlcul que incrementen la precisió de les solucions obtingudes.

## 4.2.2 Cicles no clau i superbàsics.

En desenvolupar les expressions de les operacions matricials on intervé la matriu  $B$  s'obtidran els següents productes matricials :

$$\Theta_c = A_{\mathcal{A}}^{-1} A_c \quad ; \quad \Theta_s = A_{\mathcal{A}}^{-1} A_s \quad (4.12)$$

on  $\Theta_c \in \mathbb{R}^{m \times c_x}$  i  $\Theta_s \in \mathbb{R}^{m \times s}$  són les anomenades *matriu de cicles no clau* o *de cicles  $\mathcal{C}$*  i *matriu de cicles superbàsics* o *de cicles  $\mathcal{S}$*  respectivament. De la teoria bàsica de fluxos en xarxes és ben conegut el fet que, per a cada arc  $q \notin \mathcal{A}$  existeix un cicle format exclusivament per arcs que pertanyen a  $\mathcal{A}$ , doncs aquests arcs formen un arbre generador del graf  $\mathcal{G}$ . S'indicarà amb  $\overset{\circ}{c}_{xj}$  i  $\overset{\circ}{s}_j$  el conjunt d'índexos dels arcs clau que formen cicle, respectivament, amb el  $j$ -èssim arc no clau i amb el  $j$ -èssim arc superbàsic. Si  $\mathcal{A}_i$  representa l'índex de l' $i$ -èssim arc clau, aleshores, l'element  $(i, j)$  de les matrius  $\Theta_c$  i  $\Theta_s$  vindrà donat

per (eq. (3.5) [51]) :

$$\theta_{c\ ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^+ \\ -1 & \text{si } \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^- \\ 0 & \text{si } \mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j} \end{cases} ; \quad \theta_{s\ ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^+ \\ -1 & \text{si } \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^- \\ 0 & \text{si } \mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j} \end{cases} \quad (4.13)$$

El supraindex  $^+$  indica el conjunt d'arcs del cicle que apunten al nus destí de l'arc no clau o superbàsic, i  $^-$  indica el conjunt dels que apunten al nus origen. S'indicarà amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  el conjunt total d'arcs  $\mathcal{A}$  que intervenen a cicles no clau o superbàsics, i amb  $l_c$  i  $l_s$  la seva cardinalitat :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{C}} &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{c_x} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_i} & ; & \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{s_x} \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_i} \\ l_c &\stackrel{\text{def}}{=} |\overset{\circ}{\mathcal{C}}| & ; & \quad l_s \stackrel{\text{def}}{=} |\overset{\circ}{\mathcal{S}}| \end{aligned} \quad (4.14)$$

Coneguts  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , el producte entre matrius de cicles i vectors es pot calcular fàcilment mitjançant els següents algorismes :

**Algorisme A4.1** :  $w = \Theta_c v$

Donats  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  es calcula :

Per a  $j = 1$  fins a  $c_x$  :

$$w_i := w_i + v_j, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^+$$

$$w_i := w_i - v_j, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^-$$

Fi per.

**Algorisme A4.3** :  $w' = v' \Theta_c$

Donats  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  es calcula :

Per a  $j = 1$  fins a  $c_x$  :

$$w_j := w_j + v_i, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^+$$

$$w_j := w_j - v_i, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{x_j}^-$$

Fi per.

**Algorisme A4.2** :  $w = \Theta_s v$

Donats  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  calcula :

Per a  $j = 1$  fins a  $s_x$  :

$$w_i := w_i + v_j, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^+$$

$$w_i := w_i - v_j, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^-$$

Fi per.

**Algorisme A4.4** :  $w' = v' \Theta_s$

Donats  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  es calcula :

Per a  $j = 1$  fins a  $s_x$  :

$$w_j := w_j + v_i, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^+$$

$$w_j := w_j - v_i, \quad \forall \mathcal{A}_i \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{x_j}^-$$

Fi per.

El nombre d'operacions a efectuar a cadascún d'aquests algorismes coincideix amb  $l_c$  i  $l_s$ . D'acord amb la definició de cost computacional introduïda a la secció 4.2.1, el cost

computacional d'aquests algorismes és :

$$\begin{aligned} \text{cst(A4.1)} &= \kappa(\text{A4.1})l_c & ; & & \text{cst(A4.2)} &= \kappa(\text{A4.2})l_s \\ \text{cst(A4.3)} &= \kappa(\text{A4.3})l_c & ; & & \text{cst(A4.4)} &= \kappa(\text{A4.4})l_s \end{aligned} \quad (4.15)$$

Noti's que la component  $v_j$  dels algorismes A4.1 i A4.2 està associada a la  $j$ -èssima columna de  $\Theta_c$  (o  $\Theta_s$ ), és a dir, a la variable  $c_{xj}$  (o  $s_{xj}$ ), mentre que la component  $w_i$  correspon a l'arc clau  $\mathcal{A}_i$ . Una propietat evident dels algorismes A4.1 i A4.2, que és rellevant per desenvolupaments posteriors, és que la seva implementació computacional proporciona components calculades  $\tilde{w}_i$  exactament nul·les si l'arc clau  $\mathcal{A}_i$  no pertany a cap cicle :

**Propietat 4.1 :** Siguin  $w_c, w_s \in \mathbb{R}^m$  els vectors  $w_c = \Theta_c v$  i  $w_s = \Theta_s v$ , i siguin  $\tilde{w}_c$  i  $\tilde{w}_s$ , els valors calculats segons la implementació computacional dels algorismes A4.1 i A4.2 respectivament. Aleshores es satisfà :

- 1.- Si  $\mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}} \Rightarrow \tilde{w}_{c_i} = 0$
- 2.- Si  $\mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{S}} \Rightarrow \tilde{w}_{s_i} = 0$

L'algorisme de càlcul del producte entre un vector de cicles  $\theta$  associat al cicle  $\overset{\circ}{q}$  i una matriu  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  és també extremadament senzill :

**Algorisme A4.5 :**  $w = M\theta$

Per a tot  $\mathcal{A}_j \in \overset{\circ}{q}^+ : w_i := w_i + m_{ij}, i = 1, \dots, n$

Per a tot  $\mathcal{A}_j \in \overset{\circ}{q}^- : w_i := w_i - m_{ij}, i = 1, \dots, n$

Si  $l_{m_j}$  és el nombre d'elements no nuls de la columna  $j$ -èssima de la matriu  $M$ , el cost computacional de A4.5 és :

$$\text{cst(A4.5)} = \kappa(\text{A4.5}) \sum_{\forall \mathcal{A}_j \in \overset{\circ}{q}} l_{m_j} \quad (4.16)$$

Els conjunts  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  canviaran a mida que l'optimització progressi. Més tard s'estudiarà el procés d'actualització d'aquests conjunts.

### 4.2.3 Operacions amb $B$ .

Es revisaran en aquesta secció el mètodes de resolució dels sistemes d'equacions  $Bw = v$  i  $w'B = v'$  presentats a la secció 3.2. També es proposaran nous mètodes que permeten fer un ús intensiu de la informació continguda a  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$  i es compararan amb els anteriors.

#### 4.2.3.1 Resolució de $Bw = v$ .

Consideri's la solució de  $Bw = v$ . Tenint en compte l'expressió de  $B^{-1}$  proporcionada per (4.8) s'obté :

$$w = \begin{bmatrix} w_A \\ w_c \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} v_A \\ v_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A^{-1}(v_A + [A_c | \mathbf{0}]Q^{-1}T_A A_A^{-1}v_A - [A_c | \mathbf{0}]Q^{-1}v_T) \\ Q^{-1}(v_T - T_A A_A^{-1}v_A) \end{bmatrix} \quad (4.17a)$$

$$= \begin{bmatrix} A_A^{-1}v_A - [\Theta_c | \mathbf{0}]Q^{-1}(v_T - T_A A_A^{-1}v_A) \\ Q^{-1}(v_T - T_A A_A^{-1}v_A) \end{bmatrix} \quad (4.17b)$$

Els procediments proposats pel càlcul de (4.17a) i (4.17b) s'indiquen a continuació, on el vector  $w_{c_x}$  representa les components de  $w_c$  associades als arcs no clau  $c_x$  :

**Algorisme A4.6** :  $w = B^{-1}v$ , sense  $\overset{\circ}{C}$ .

- 1  $\gamma_1 \xleftarrow{F.X.} A_A^{-1}v_A \quad (m)$
- 2  $\gamma_2 \leftarrow v_T - T_A \gamma_1 \quad (2l_{T_A})$
- 3  $w_c \leftarrow Q^{-1}\gamma_2 \quad (2l_{LU} + t)$
- 4  $\gamma_2 \leftarrow v_A - [A_c | \mathbf{0}]w_{c_x} \quad (2c_x)$
- 5  $w_A \xleftarrow{F.X.} A_A^{-1}\gamma_2 \quad (m)$

**Algorisme A4.7** :  $w = B^{-1}v$ , amb  $\overset{\circ}{C}$ .

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad \gamma_1 &\stackrel{F.X.}{\longleftarrow} A_{\mathcal{A}}^{-1}v_{\mathcal{A}} && (m) \\
 \boxed{2} \quad \gamma_2 &\longleftarrow v_T - T_{\mathcal{A}}\gamma_1 && (2l_{T_{\mathcal{A}}}) \\
 \boxed{3} \quad w_c &\longleftarrow Q^{-1}\gamma_2 && (2l_{LU} + t) \\
 \boxed{4} \quad w_{\mathcal{A}} &\stackrel{A4.1}{\longleftarrow} \gamma_1 - \Theta_c w_{c_x} && (l_c)
 \end{aligned}$$

Les expressions afegides al final de cada passa representen el nombre d'operacions realitzades.  $l_{T_{\mathcal{A}}}$  és el nombre d'elements no nuls de la matriu  $T_{\mathcal{A}}$ , i  $l_{LU}$  el nombre d'elements no nuls dels factors  $LU$  de  $Q$ . Es considera que es treballa amb una representació esparsa de la matriu de constriccions a banda  $T$ . La diferència entre els dos algorismes rau en el càlcul de  $A_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma_2$  i  $[A_c|\mathbf{0}]w_{c_x}$  a A4.6, el qual és substituït pel producte  $\Theta_c w_{c_x}$  a A4.7. El nombre d'operacions implicades en els dos primers càlculs és  $m$  i  $2c_x$  respectivament, amb un cost computacional total de  $\kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v)m + \kappa(A_c v)(2c_x)$ , seguint la definició (4.11) de cost computacional. El cost computacional de  $\Theta_c w_{c_x}$  és  $\text{cst}(A4.1) = \kappa(A4.1)l_c$ . Aquests dos costos depenen de l'estructura de la base a cada iteració de A3.1. Es denotarà amb  $\psi(B^{-1}v)^k$  la diferència entre el cost computacional dels algorismes A4.6 i A4.7 a la iteració  $k$ -èsima (que coincideix amb la diferència de cost de les darreres passes) :

$$\psi(B^{-1}v)^k = \text{cst}(A4.6)^k - \text{cst}(A4.7)^k = \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v)m + 2\kappa(A_c v)c_x^k - \kappa(A4.1)l_c^k \quad (4.18)$$

Si es disposés d'una bona estimació dels valors de les constants  $\kappa$ , el signe de  $\psi(B^{-1}v)^k$  determinaria quin dels dos algorismes resulta indicat aplicar a cada iteració. El valor de  $\psi(B^{-1}v)^k$  és una avaluació del guany (si  $\psi(B^{-1}v)^k > 0$ ) o pèrdua (si  $\psi(B^{-1}v)^k < 0$ ) del temps de computació de l'algorisme A4.7 respecte a A4.6 :

$$\psi(B^{-1}v)^k = \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{cst}(A4.6)^k > \text{cst}(A4.7)^k \\ < 0 \Rightarrow \text{cst}(A4.6)^k < \text{cst}(A4.7)^k \end{cases} \quad (4.19)$$

Un cas especialment important es produeix quan  $v = m_q$ , on  $m_q$  indica la columna de la matriu de constriccions  $M$  associada a la variable  $y_q$  que ha d'entrar a la base. L'expressió de la solució  $w$ , i de l'algorisme que permet trobar-la, dependrà de si  $y_q$  correspon a un arc ( $q \in \mathcal{S}_x \cup \mathcal{N}_x$ ) o a una folga ( $q \in \mathcal{S}_z \cup \mathcal{N}_z$ ). Si  $q \in \mathcal{S}_x \cup \mathcal{N}_x$ ,  $v$  pren la forma  $v' = [a'_q \mid t'_q]$ . En aquest cas els productes  $A_{\mathcal{A}}^{-1}v_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q = \theta_q$  on  $\theta_q$  és el vector de

cicles de l'arc  $q$ . L'expressió de  $w$  és :

$$w = \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{\mathcal{A}}^{-1}(a_q + [A_c|\mathbf{0}]Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q - [A_c|\mathbf{0}]Q^{-1}t_q)}{Q^{-1}(t_q - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q)} \\ \frac{A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q - [\Theta_c|\mathbf{0}]Q^{-1}(t_q - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q)}{Q^{-1}(t_q - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q)} \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q - [\Theta_c|\mathbf{0}]Q^{-1}(t_q - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q)}{Q^{-1}(t_q - T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q)} \end{bmatrix} \quad (4.20b)$$

Els algorismes de càlcul de les expressions (4.20a) i (4.20b) són :

**Algorisme A4.8** :  $w = B^{-1}m_q$ ,  $q$  arc, sense  $\mathring{C}$ .

- 1  $\theta_q \xleftarrow{F.X.} A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q \quad (\|\theta_q\|_1)$
- 2  $\gamma_1 \xleftarrow{A4.5} t_q - T_{\mathcal{A}}\theta_q \quad (l_{t_q} + l_{T_{\mathcal{A}}})$
- 3  $w_c \leftarrow Q^{-1}\gamma_1 \quad (2l_{LU} + t)$
- 4  $\gamma_2 \leftarrow a_q - [A_c|\mathbf{0}]w_{c_x} \quad (2 + 2c_x)$
- 5  $w_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} A_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma_2 \quad (m)$

**Algorisme A4.9** :  $w = B^{-1}m_q$ ,  $q$  arc, amb  $\mathring{C}$ .

- 1  $\theta_q \xleftarrow{F.X.} A_{\mathcal{A}}^{-1}a_q \quad (\|\theta_q\|_1)$
- 2  $\gamma_1 \xleftarrow{A4.5} t_q - T_{\mathcal{A}}\theta_q \quad (l_{t_q} + l_{T_{\mathcal{A}}})$
- 3  $w_c \leftarrow Q^{-1}\gamma_1 \quad (2l_{LU} + t)$
- 4  $w_{\mathcal{A}} \xleftarrow{A4.1} \theta_q - \Theta_c w_{c_x} \quad (\|\theta_q\|_1 + l_c)$

on  $\|\theta_q\|_1$  és la norma  $l_1$  del vector  $\theta_q$  que coincideix amb el nombre d'arcs bàsics presents al cicle bàsic de  $q$  per ser  $\theta_q$  un vector de cicle.  $l_{t_q}$  és el nombre d'elements no nuls del vector  $t_q$ . L'escalar  $\psi(B^{-1}m_{q \leq \bar{n}})^k$  que indica la diferència de cost computacional a la iteració  $k$ -èsima entre A4.9 i A4.8, (menystenint les dues operacions de la suma de  $a_q$  a la passa **5** de A4.8) és :

$$\psi(B^{-1}m_{q \leq \bar{n}})^k = \text{cst}(A4.8)^k - \text{cst}(A4.9)^k = \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v)m + 2\kappa(A_c v)c_x^k - \kappa(\theta_q)\|\theta_q^k\|_1 - \kappa(A4.1)l_c^k \quad (4.21)$$

on la constant  $\kappa(\theta_q)$  és la constant  $\kappa$  corresponent a la implementació de l'algorisme de càlcul de  $w \leftarrow v + \theta_q$ .

En cas que  $q \in \mathcal{S}_z \cup \mathcal{N}_z$ ,  $v$  pren la forma  $v' = [0' \mid e_{q-\bar{n}}^t]'$ . L'expressió de  $w$  és:

$$\begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t \\ Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\Theta_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t \\ Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Els algorismes que permeten avaluar les dues expressions alternatives de  $w$  són :

**Algorisme A4.10** :  $w = B^{-1}m_q$ ,  $q$  folga, sense  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \begin{bmatrix} w_{c_x} \\ w_{c_z} \end{bmatrix} \longleftarrow Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t & (2l_{LU} + t) & \boxed{3} w_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} A_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma_1 & (m) \\ \boxed{2} \gamma_1 \longleftarrow -A_{\mathcal{C}}w_{c_x} & (2c_x) & & \end{array}$$

**Algorisme A4.11** :  $w = B^{-1}m_q$ ,  $q$  folga, amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\boxed{1} \begin{bmatrix} w_{c_x} \\ w_{c_z} \end{bmatrix} \longleftarrow Q^{-1}e_{q-\bar{n}}^t \quad (2l_{LU} + t) \quad \boxed{2} w_{\mathcal{A}} \xleftarrow{A4.1} -\Theta_{\mathcal{C}}w_{c_x} \quad (l_{\mathcal{C}})$$

La diferència entre el cost computacional a la iteració  $k$ -èssima del dos algorismes és :

$$\psi(B^{-1}m_{q>\bar{n}})^k = \text{cst}(A4.10)^k - \text{cst}(A4.11)^k = \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v)m + 2\kappa(A_{\mathcal{C}}v)c_x^k - \kappa(A4.1)l_{\mathcal{C}}^k \quad (4.23)$$

La interpretació de  $\psi(B^{-1}m_{q>\bar{n}})^k$  és similar a la de  $\psi(B^{-1}m_{q\leq\bar{n}})^k$ .

#### 4.2.3.2 Resolució de $w'B = v'$ .

Consideri's la solució de  $w'B = v'$  proporcionada per l'equació (3.21) . Tenint en compte l'expressió de  $B^{-1}$  proporcionada per (4.8) s'obté :

$$\begin{aligned} w' &= [w'_{\mathcal{A}} \mid w'_T] = [v'_{\mathcal{A}} \mid v'_c]B^{-1} = \\ &= \left[ (v'_{\mathcal{A}} + (v'_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}] - v'_c)Q^{-1}T_{\mathcal{A}})A_{\mathcal{A}}^{-1} \mid (v'_c - v'_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}])Q^{-1} \right] \\ &= \left[ (v'_{\mathcal{A}} - (v'_c - v'_{\mathcal{A}}[\Theta_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}])Q^{-1}T_{\mathcal{A}})A_{\mathcal{A}}^{-1} \mid (v'_c - v'_{\mathcal{A}}[\Theta_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}])Q^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Durant l'aplicació del procés d'optimització, l'expressió (4.24) haurà d'ésser avaluada en dues situacions diferents. La primera situació correspon al càlcul del vector  $\pi$  d'estimació dels multiplicadors de Lagrange  $\pi^*$  associats a les constriccions de xarxa i a banda, descrits a l'equació (3.13a) . Dins d'aquest context, el vector  $v$  és dens i correspon, segons s'estigui resolent (**FLCL**) o (**FNCL**) , a les components bàsiques del vector gradient



$v' = [g(x)'_{\mathcal{A}} \mid g(x)'_{\mathcal{C}}]$ , o del vector de costos  $v' = [c'_{\mathcal{A}} \mid c'_{\mathcal{C}}]$ . Els algorismes proposats per avaluar (4.24), amb i sense l'ús de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  són :

**Algorisme A4.12** :  $w' = v'B^{-1}$ ,  $v$  vector qualsevol, sense  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \quad \gamma'_1 \xleftarrow{F.X.} v'_{\mathcal{A}} A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \quad \boxed{4} \quad \gamma'_1 \longleftarrow v'_{\mathcal{A}} - w'_T T_{\mathcal{A}} & (2l_{T_{\mathcal{A}}}) \\ \boxed{2} \quad \gamma'_2 \longleftarrow v'_{\mathcal{C}} - \gamma'_1 [A_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] & (2c_x) \quad \boxed{5} \quad w'_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} \gamma'_1 A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \\ \boxed{3} \quad w'_T \longleftarrow \gamma'_2 Q^{-1} & (2l_{LU} + t) \end{array}$$

**Algorisme A4.13** :  $w' = v'B^{-1}$ ,  $v$  vector qualsevol, amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \quad \gamma'_1 \xleftarrow{A4.3} v'_{\mathcal{C}} - v'_{\mathcal{A}} \Theta_{\mathcal{C}} & (l_{\mathcal{C}}) \quad \boxed{3} \quad \gamma'_2 \longleftarrow v'_{\mathcal{A}} - w'_T T_{\mathcal{A}} & (2l_{T_{\mathcal{A}}}) \\ \boxed{2} \quad w'_T \longleftarrow \gamma'_1 Q^{-1} & (2l_{LU} + t) \quad \boxed{4} \quad w'_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} \gamma'_2 A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \end{array}$$

La diferència entre el cost computacional d'aquests dos algorismes durant la iteració  $k$ -èsima de A3.1 és :

$$\psi(v'B^{-1})^k = \text{cst}(A4.12)^k - \text{cst}(A4.13)^k = \kappa(v'A_{\mathcal{A}}^{-1})m + 2\kappa(v'A_{\mathcal{C}})c_x^k - \kappa(A4.3)l_{\mathcal{C}}^k \quad (4.25)$$

on  $\kappa(v'A_{\mathcal{A}}^{-1})$  i  $\kappa(v'A_{\mathcal{C}})$  són les constants  $\kappa$  de les implementacions dels algorismes de càlcul de  $v'A_{\mathcal{A}}^{-1}$  i  $v'A_{\mathcal{C}}$ . La segona situació de càlcul de  $w' = v'B^{-1}$  es produeix en el procés d'actualització del vector  $\pi$  per pivotació. En aquest procés s'ha de calcular la columna de  $B^{-1}$  associada a la variable bàsica sortint  $\mathcal{B}_i$ , que equival a resoldre el sistema  $w' = e_i^{m+t} B^{-1}$ . Si  $\mathcal{B}_i \in \mathcal{A}$ , llavors  $v' = [e_i^{m'} \mid 0]$ , i s'obté :

$$\begin{aligned} [w'_{\mathcal{A}} \mid w'_T] &= \\ &= \left[ (e_i^{m'} + e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1} [A_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} T_{\mathcal{A}}) A_{\mathcal{A}}^{-1} \mid -e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1} [A_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} \right] = \\ &= \left[ (e_i^{m'} + e_i^{m'} [\Theta_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} T_{\mathcal{A}}) A_{\mathcal{A}}^{-1} \mid -e_i^{m'} [\Theta_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

**Algorisme A4.14** :  $w' = [e_i^{m'} \mid 0] B^{-1}$ , sense  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \quad \gamma'_1 \xleftarrow{F.X.} e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \quad \boxed{4} \quad \gamma'_1 \longleftarrow e_i^{m'} - w'_T T_{\mathcal{A}} & (2l_{T_{\mathcal{A}}} + 1) \\ \boxed{2} \quad \gamma'_2 \longleftarrow \gamma'_1 [A_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] & (2c_x) \quad \boxed{5} \quad w'_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} \gamma'_1 A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \\ \boxed{3} \quad w'_T \longleftarrow -\gamma'_2 Q^{-1} & (2l_{LU} + t) \end{array}$$

**Algorisme A4.15** :  $w' = [e_i^{m'} \mid 0] B^{-1}$ , amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \quad \gamma'_1 \longleftarrow -e_i^{m'} [\Theta_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] & (l_{\mathcal{C}}) \quad \boxed{3} \quad \gamma'_2 \longleftarrow e_i^{m'} - w'_T T_{\mathcal{A}} & (2l_{T_{\mathcal{A}}} + 1) \\ \boxed{2} \quad w'_T \longleftarrow \gamma'_1 Q^{-1} & (2l_{LU} + t) \quad \boxed{4} \quad w'_{\mathcal{A}} \xleftarrow{F.X.} \gamma'_2 A_{\mathcal{A}}^{-1} & (m) \end{array}$$

Indicant per  $\kappa(e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1})$  i  $\kappa(v' A_c)$  les constants  $\kappa$  de les passes **1** i **2** de A4.14 i  $\kappa(e_i^{m'} \Theta_c)$  a la constant  $\kappa$  de la passa **1** de A4.15, la diferència entre el cost computacional d'aquests dos algorismes a la iteració  $k$ -èssima, és :

$$\psi(e_i^{m'} B^{-1})^k = \text{cst(A4.14)}^k - \text{cst(A4.15)}^k = \kappa(e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1}) m + 2\kappa(v' A_c) c_x^k - \kappa(e_i^{m'} \Theta_c) l_c^k \quad (4.27)$$

S'ha de fer notar que la fita  $O(m)$  assignada a l'operació  $e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1}$  és massa estricta, doncs en realitat el nombre d'operacions a realitzar coincideix amb el nombre de descendents del nus associat a l'arc clau  $\mathcal{B}_i$ . Així mateix, el cost  $O(l_c)$  associat a  $e_i^{m'} [\Theta_c | \mathbf{0}]$ , operació que consisteix en la identificació dels cicles  $\mathcal{C}$  on intervé  $\mathcal{B}_i$ , és també una sobrestimació del nombre d'operacions a realitzar, que, en general, no arriba mai a  $l_c$ .

Si  $\mathcal{B}_i = c_j \in \mathcal{C}$ , corresponent a la  $j$ -èssima variable no clau, llavors  $v' = [0 \mid e_j^{t'}]$ . En aquest cas els cicles no clau no intervenen en el càlcul de  $w$ , que es durà a terme amb el següent procediment :

(4.28)

$$[w'_A \mid w'_T] = \left[ -e_j^{t'} Q^{-1} T_{\mathcal{A}} A_{\mathcal{A}}^{-1} \mid e_j^{t'} Q^{-1} \right] \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Algorisme A4.16 :} \\ \\ w' = [0 \mid e_j^{t'}] B^{-1} \\ \textbf{1} \quad w'_T \leftarrow e_j^{t'} Q^{-1} \\ \textbf{2} \quad w'_A \xleftarrow{F.X.} -w'_T T_{\mathcal{A}} A_{\mathcal{A}}^{-1} \end{array} \right.$$

#### 4.2.4 Operacions amb $Z$ .

L'aplicació de l'algorisme A3.1 necessita d'un sistema eficient de càlcul de productes entre la base de l'espai nul  $Z$  i vectors  $v \in \mathbb{R}^s$ , i entre  $Z'$  i vectors  $v \in \mathbb{R}^{(\tilde{n}+\tilde{i})}$ . El producte per  $Z$  és especialment important pel fet que proporciona el càlcul de la direcció  $p$  de descens de **(FNCL)** a partir de la direcció  $p_z$  de descens pel problema **(SNM)** ( $p = Zp_z$ , passa **3.1** de A3.1), i pot ésser necessari també durant la resolució del sistema  $H_z p_z = -g_z$  i durant la realització de l'exploració lineal. El producte per  $Z'$  és necessari pel càlcul del gradient reduït  $g_z(x) = Z'g(x)$  i, eventualment, durant el càlcul de  $p_z$ .

#### 4.2.4.1 Producte $w = Zv$ .

Sigui el vector  $v \in \mathbb{R}^s$  i l'expressió de  $Z$  donada per l'equació (3.5). Considerarem el vector  $w \in \mathbb{R}^{(\tilde{n}+\tilde{i})}$  particionat de la forma habitual en components bàsiques, superbàsiques i no bàsiques. Aleshores, el resultat  $w = Zv$  ve expressat per :

$$w = Zv \quad ; \quad \begin{bmatrix} w_{\mathcal{B}} \\ \hline w_{\mathcal{S}} \\ \hline w_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}S \\ \hline \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -B^{-1}Sv \\ \hline v \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_{\mathcal{B}} = -B^{-1}Sv \\ w_{\mathcal{S}} = v \\ w_{\mathcal{N}} = [0] \end{cases} \quad (4.29)$$

així doncs, només ens hem de preocupar del càlcul de les components bàsiques  $w_{\mathcal{B}}$ .

L'estratègia òptima de càlcul de  $w_{\mathcal{B}}$  està directament lligada a l'estructura del problema resolt. Pels problemes (NCL) no estructurats, res es pot dir sobre la disposició dels elements de  $B^{-1}S$ . En aquest cas, el procediment habitual de càlcul de  $w_{\mathcal{B}}$  consisteix en l'obtenció en primer lloc del vector auxiliar  $\gamma = Sv$  per procedir posteriorment a la resolució del sistema  $Bw_{\mathcal{B}} = \gamma$ , mitjançant l'ús de la factorització  $LU$  de  $B$ . La matriu  $Z$  dels problemes (NCL) no estructurats no es guarda mai explícitament degut a que és, en general, densa. En el cas de fluxos purs la matriu  $B^{-1}$  coincideix amb  $A_{\mathcal{A}}^{-1}$ , corresponent el producte  $B^{-1}S$  a la matriu de cicles superbàsics  $\Theta_{\mathcal{S}}$  descrita a la secció 4.2.2. D'aquesta forma, el vector  $w_{\mathcal{B}}$  del problema (FN) pren la forma  $w_{\mathcal{B}} = -\Theta_{\mathcal{S}}v$ , calculable directament mitjançant l'algorisme A4.2, amb cost  $O(l_{\mathcal{S}})$ . Les implementacions especialitzades de l'algorisme A3.1 pel problema (FN) [21, 72] treballen amb una representació explícita de la matriu  $Z$  consistent en l'emmagatzematge en memòria dels cicles superbàsics  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , per bé que aquesta no és sempre la millor opció, com es demostrarà més endavant. L'estructura extremadament senzilla de  $B^{-1}S$  pel problema (FN) es complica considerablement si s'està en presència de constriccions a banda. En aquest cas, com es veurà més endavant, l'estratègia òptima depèn de l'estructura que presenti la base i els cicles  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  a cada iteració de A3.1. La representació explícita de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  i la seva actualització presenten un cost computacional completament assumible.

Les components de  $w_{\mathcal{B}}$  es troben associades a les files de  $B^{-1}$  o, el que és el mateix, a les columnes de  $B$ . Això permet extrapolar la partició de les columnes de  $B$  a les components de  $w_{\mathcal{B}}$  i parlar així de components clau ( $w_{\mathcal{A}}$ ) i no clau ( $w_{\mathcal{C}}$ ). Observant l'expressió de  $w_{\mathcal{B}}$  donada per (4.29) queda clar que una forma natural de procedir és calcular el vector

$\gamma = -Sv$  i premultiplicar per  $B^{-1}$  aplicant l'algorisme A4.6 o A4.7. Considerem la matriu  $S$  del problema (FNCL) amb la partició definida a (4.4). Considerem les components del vector  $v$  agrupades d'acord amb les columnes de  $S$ , és a dir, primer les  $s_x$  components associades a  $\mathcal{S}_x$  i després les  $s_z$  components associades a  $\mathcal{S}_z$ . El producte  $Sv$  es transforma en :

$$Sv = \begin{bmatrix} A_s & \mathbf{0} \\ T_s & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s v_x \\ T_s v_x + \mathbf{I}_s v_z \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

llavors, introduint el vector auxiliar  $\gamma' = [\gamma'_A \mid \gamma'_T]$ , els següents algorismes permeten calcular  $w_B$  amb i sense l'ús dels cicles  $\overset{\circ}{C}$  :

**Algorisme A4.17 :**

**Algorisme A4.18 :**

$-B^{-1}(Sv)$  sense  $\overset{\circ}{C}$

$-B^{-1}(Sv)$  amb  $\overset{\circ}{C}$

**1**  $\gamma_A \leftarrow -A_s v_x \quad (2s_x)$

**1**  $\gamma_A \leftarrow -A_s v_x \quad (2s_x)$

**2**  $\gamma_T \leftarrow -T_s v_x - \mathbf{I}_s v_z \quad (2l_{T_s} + s_z)$

**2**  $\gamma_T \leftarrow -T_s v_x - \mathbf{I}_s v_z \quad (2l_{T_s} + s_z)$

**3**  $w_B \xleftarrow{A4.6} B^{-1} \gamma$

**3**  $w_B \xleftarrow{A4.7} B^{-1} \gamma$

on  $l_{T_s}$  és el nombre d'elements no nuls de la matriu  $T_s$ . L'eficiència relativa entre aquest dos algorismes és la resultant de comparar els algorismes A4.6 i A4.7, que depèn del signe de  $\psi(B^{-1}v)^k$ , segons indica (4.18) .

Els productes amb la matriu  $A_A^{-1}$  presents a A4.6 i A4.7, tot i tenir cost  $O(m)$ , poden presentar certs problemes precisió numèrica que fan aconsellable intentar d'evitar-los. L'origen d'aquests problemes s'exposarà més endavant. És possible desenvolupar un mètode de càlcul de  $w_B$ , alternatiu al mètode immediat que representen A4.17 i A4.18 que incrementi la precisió del valor calculat de  $w_B$  i que, depenent de l'estructura de la base, minvi alhora el cost computacional de càlcul de  $w_B$ . Aquesta forma de càlcul es basa en l'ús intensiu dels conjunts de cicles  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$  i s'exposarà a continuació.

Substituint (4.30) a l'expressió  $w_B = -B^{-1}Sv$  i desenvolupant-la, tenint en compte

l'estructura interna de  $B^{-1}$  descrita a (4.8), s'obté :

$$\begin{aligned}
 w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ - \\ w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} &= -B^{-1}Sv = \\
 &= - \begin{bmatrix} A_{\mathcal{A}}^{-1} + A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1} & -A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1} \\ -Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathcal{S}}v_x \\ T_{\mathcal{S}}v_x + \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} (A_{\mathcal{A}}^{-1} + A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1})A_{\mathcal{S}}v_x - A_{\mathcal{A}}^{-1}[A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}(T_{\mathcal{S}}v_x + \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \\ -Q^{-1}T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{S}}v_x + Q^{-1}(T_{\mathcal{S}}v_x + \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{S}}v_x + [A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}(T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{S}}v_x - T_{\mathcal{S}}v_x - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \\ -Q^{-1}(T_{\mathcal{A}}A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{S}}v_x - T_{\mathcal{S}}v_x - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

substituint els productes  $A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{C}}$  i  $A_{\mathcal{A}}^{-1}A_{\mathcal{S}}$  per les matrius  $\Theta_{\mathcal{C}}$  i  $\Theta_{\mathcal{S}}$  de cicles no clau i superbàsics, l'expressió de  $w_{\mathcal{B}}$  es redueix a :

$$w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ - \\ w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Theta_{\mathcal{S}}v_x - [\Theta_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}(T_{\mathcal{A}}\Theta_{\mathcal{S}}v_x - T_{\mathcal{S}}v_x - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \\ Q^{-1}(T_{\mathcal{A}}\Theta_{\mathcal{S}}v_x - T_{\mathcal{S}}v_x - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Considerant disponible certa representació de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , el procediment de càlcul de  $w_{\mathcal{B}}$  seria :

**Algorisme A4.19** :  $w_{\mathcal{B}} = Zv$  amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .

- 1**  $\gamma_1 \xleftarrow{A4.2} \Theta_{\mathcal{S}}v_x \quad (l_{\mathcal{S}})$
- 2**  $\gamma_2 \leftarrow T_{\mathcal{A}}\gamma_1 - T_{\mathcal{S}}v_x - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z \quad (2l_{T_{\mathcal{A}}} + 2l_{T_{\mathcal{S}}} + s_z)$
- 3**  $[w'_{c_x} \mid w'_{c_z}] \leftarrow -Q^{-1}\gamma_2 \quad (2l_{LU} + t)$
- 4**  $w_{\mathcal{A}} \xleftarrow{A4.1} \gamma_1 - \Theta_{\mathcal{C}}w_{c_x} \quad (l_{\mathcal{C}})$

Es vol comparar ara el cost computacional d'aquest algorisme amb el cost dels algorismes A4.17 i A4.18. Els productes  $T_{\mathcal{S}}v_x$  i  $\mathbf{I}_{\mathcal{S}}v_z$  efectuats a l'algorisme A4.19 són els mateixos que es realitzen a la passa **2** dels algorismes A4.17 i A4.18. Els productes del tipus  $T_{\mathcal{A}}v$  i  $Q^{-1}v$  també s'han de resoldre a qualsevol dels algorismes de càlcul de  $B^{-1}v$  cridats a A4.17 i A4.18. Si es comparen els algorismes A4.17 i A4.19 és fàcil comprovar que, a banda dels càlculs esmentats :

- 1.- A4.17 ha de resoldre el producte  $A_S v_x$  a la passa **1**, i dos productes  $A_A^{-1}v$  i un producte  $A_C v$  durant l'aplicació de A4.6.
- 2.- A4.19 ha de calcular  $\Theta_S v_x$  i  $\Theta_C w_{c_x}$ .

Segons aixó, l'escalar  $\psi_a(Zv)^k$  que indicarà la diferència de cost computacional entre A4.17 i A4.19 a la iteració  $k$ -èssima serà :

$$\begin{aligned} \psi_a(Zv)^k &= \text{cst}(A4.17)^k - \text{cst}(A4.19)^k = \\ &= 2\kappa(A_S v) s_x^k + 2\kappa(A_C v) c_x^k + 2\kappa(A_A^{-1}v) m - \kappa(A4.1)l_c^k - \kappa(A4.2)l_s^k \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si es comparen A4.18 amb A4.19 s'observa que :

- 1.- A4.18 realitza el producte  $A_S v_x$  a la passa **1** i un producte  $A_A^{-1}v$  dins la crida a A4.7.
- 2.- A4.19 ha de calcular  $\Theta_S v_x$  a la passa **1**.

Noti's que el producte  $\Theta_C w_{c_x}$  de la passa **4** de A4.19 també s'efectua dins de A4.7, quedant així aquesta operació exclosa de la comparació. L'escalar  $\psi_b(Zv)^k$  associat a la comparació dels algorismes A4.18 i A4.19 es defineix com :

$$\psi_b(Zv)^k = \text{cst}(A4.18)^k - \text{cst}(A4.19)^k = 2\kappa(A_S v) s_x^k + \kappa(A_A^{-1}v) m - \kappa(A4.2)l_s^k \quad (4.33)$$

De les expressions (4.32) i (4.33) queda clar que res es pot dir a priori sobre l'eficiència comparada dels algorismes de càlcul de  $Zv$ , doncs depenen del valor de  $s_x^k$ ,  $c_x^k$ ,  $l_c^k$  i  $l_s^k$ , que, en general, variaran a cada iteració. Aixó és cert fins i tot en el cas de fluxos no lineals purs, on la diferència de cost computacional entre el càlcul de  $\Theta_S v$  i  $B^{-1}(Sv)$  és :

$$\psi(Zv)_{(FN)}^k = 2\kappa(A_S v) s_x^k + \kappa(A_A^{-1}v) m - \kappa(A4.2)l_s^k \quad (4.34)$$

Així doncs, no és correcta l'afirmació de certs autors indicant que és recomenable sempre treballar directament amb una representació explícita dels cicles superbàsics, doncs aixó dependrà del nombre d'arcs superbàsics i de la cardinalitat de  $\mathring{S}$ .

Finalment cal comentar que els procediments que permeten disposar de la representació explícita de  $\mathring{C}$  i  $\mathring{S}$  tenen un cost computacional addicional que es redueix al càlcul del cicle bàsic  $\mathring{q}$  quan la variable no bàsica  $q$  és seleccionada a la passa **2.2** de l'algorisme

A3.1, operació que té cost  $O(\|\theta_q\|_1)$ . El procés d'actualització de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , delicat però amb un cost menystenible, serà estudiat posteriorment.

#### 4.2.4.2 Producte $w = Z'v$ .

S'estudiarà en aquesta secció el procediment de càlcul de productes entre la transposta de  $Z$  i vectors  $v \in \mathbb{R}^{(\tilde{n}+\tilde{t})}$ . Es considerarà, com és habitual, el vector  $v$  dividit en les seves components bàsiques, superbàsiques i no bàsiques. Si es desenvolupa l'expressió de  $Z$  donada per (3.5) s'obté :

$$w = Z'v = \begin{bmatrix} -(B^{-1}S)' & | & \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\mathcal{B}} \\ \text{---} \\ v_{\mathcal{S}} \\ \text{---} \\ v_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = v_{\mathcal{S}} - (B^{-1}S)'v_{\mathcal{B}} + [\mathbf{0}]v_{\mathcal{N}} = v_{\mathcal{S}} - S'(B^{-1})'v_{\mathcal{B}} \quad (4.35)$$

on el producte  $Z'v$  s'ha descomposat en els productes  $\gamma = (B^{-1})'v_{\mathcal{B}}$  i,  $S'\gamma$ . Transposant el producte  $\gamma = (B^{-1})'v_{\mathcal{B}}$  s'obté  $\gamma' = v_{\mathcal{B}}'B^{-1}$ , que pot ésser resolt aplicant l'algorisme A4.12 o A4.13. Atenent a l'estructura interna de  $S$  exhibida a (4.4) , i agrupant les components de  $w$  i  $v_{\mathcal{S}}$  segons estiguin associades a arcs o folgues superbàsiques, el càlcul de  $w$  queda reduït a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_{s_x} \\ \text{---} \\ w_{s_z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_{s_x} \\ \text{---} \\ v_{s_z} \end{bmatrix} - S'\gamma = \begin{bmatrix} v_{s_x} \\ \text{---} \\ v_{s_z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A'_S & T'_S \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}'_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_A \\ \text{---} \\ \gamma_T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{s_x} \\ \text{---} \\ v_{s_z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A'_S\gamma_A + T'_S\gamma_T \\ \mathbf{I}'_S\gamma_T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_{s_x} = v_{s_x} - A'_S\gamma_A - T'_S\gamma_T \\ w_{s_z} = v_{s_z} - \mathbf{I}'_S\gamma_T \end{cases} \quad (4.36) \end{aligned}$$

El producte  $T'_S\gamma_T$  és un producte matricial que es resol amb tècniques estàndard d'esparsitat. El producte  $A'_S\gamma_A$ , es pot resoldre eficientment usant la descripció de la topologia del graf  $\mathcal{G}$ . El procediment de càlcul de  $w = Z'v$  que es proposa és :

**Algorisme A4.20 :**  $w = Z'v$

- 1  $[\gamma'_A \quad | \quad \gamma'_T] \stackrel{\text{A4.12}}{\underset{\text{A4.13}}{=}} v'B^{-1}$
- 2  $w_{s_x i} \leftarrow v_{s_x i} - (\gamma_{A o(s_x i)} - \gamma_{A d(s_x i)}) - t'_{s_x i}\gamma_T \quad , \quad i = 1, \dots, s_x$
- 3  $w_{s_z i} \leftarrow v_{s_z i} - \gamma_{T(s_z i - \tilde{n})} \quad , \quad i = 1, \dots, s_z$

on  $o(s_x i)$  i  $d(s_x i)$  indiquen el nus origen i destí de l'arc superbàsic  $s_x i$ .

L'expressió (4.36) correspon al cas més general de càlcul del producte  $Z'v$ , on  $v$  és un vector qualsevol. L'algorisme A3.1 necessita realitzar aquest càlcul només en certes situacions molt particulars. En concret, productes amb  $v$  vector qualsevol només són necessaris per resoldre certes variants del càlcul de la direcció  $p_z$ . La resta de situacions on s'ha d'efectuar aquest producte, el vector  $v$  representa el vector gradient de les variables, que té components nul·les associades a les folgues :

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ - \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

aixó fa que el vector  $v_{s_z}$  sigui nul.

A la passa [2.1] de A3.1 es realitza el càlcul de  $\sigma_{\mathcal{N}}$ , l'estimació dels multiplicadors de Lagrange  $\sigma_{\mathcal{N}}^*$ . L'expressió del vector  $\sigma_{\mathcal{N}}$  és :

$$\sigma_{\mathcal{N}} = g(x)_{\mathcal{N}} - N'\pi = g(x)_{\mathcal{N}} - N'(B^{-1})'g(x)_{\mathcal{B}} \tag{4.37}$$

aquesta expressió és equivalent a l'expressió final de (4.35) , substituint  $v_s$  per  $g(x)_{\mathcal{N}}$ ,  $S$  per  $N$  i  $v_{\mathcal{B}}$  per  $g(x)_{\mathcal{B}}$ . Així doncs, el procés de càlcul de  $Z'v$  que s'acaba de desenvolupar és aplicable el càlcul del vector  $\sigma_{\mathcal{N}}$ . En el cas de fluxos lineals, l'expressió (4.37) proporciona el valor dels costos reduïts, substituint  $g(x)$  pel vector de costos  $c$ . S'ha de fer notar, però, que en calcular  $\sigma_{\mathcal{N}}$  mitjançant A4.20, el càlcul dut a terme a la passa [1] és innecessari, doncs el vector  $\pi = g(x)_{\mathcal{B}}B^{-1}$  ja haurà estat calculat (o millor dit, actualitzat) a l'acabament de la iteració anterior. Per aquesta raó, la versió de l'algorisme A4.20 adaptada al càlcul de  $\sigma_{\mathcal{N}}$  és :

**Algorisme A4.21** :  $\sigma_{\mathcal{N}} = g(x)_{\mathcal{N}} - N'\pi$

Donats  $\pi = [\pi'_A \mid \pi'_T] \in \mathbb{R}^m$ ,  $g(x) \in \mathbb{R}^n$  es calcula :

[1]  $\sigma_{\mathcal{N}_x i} \leftarrow g(x)_{\mathcal{N}_x i} - (\pi_{A o(\mathcal{N}_x i)} - \pi_{A d(\mathcal{N}_x i)}) - t'_{\mathcal{N}_x i} \pi_T \quad , \quad i = 1, \dots, |\mathcal{N}_x|$

[2]  $\sigma_{\mathcal{N}_z i} \leftarrow -\pi_{T(\mathcal{N}_z i - \bar{n})} \quad , \quad i = 1, \dots, |\mathcal{N}_z|$



## 4.2.5 Representació explícita de cicles i precisió numèrica.

Un dels motius de l'estudi presentat als apartats anteriors sobre els procediments de càlcul amb  $B$  i  $Z$  ha estat l'eliminació de certs problemes de precisió numèrica en el càlcul de la direcció de descens  $p = Zp_z$  observats en les primeres versions de la implementació de l'algorisme A3.1. Aquests errors de precisió del valor calculat de  $p$  provocaven, sota certes condicions, l'abortament del procés d'optimització per una selecció errònia de la variable bàsica sortint  $p$  (passa **3.5** de A3.1). Es descriurà en aquesta secció l'origen del problema i les mides preses per tal d'evitar-lo.

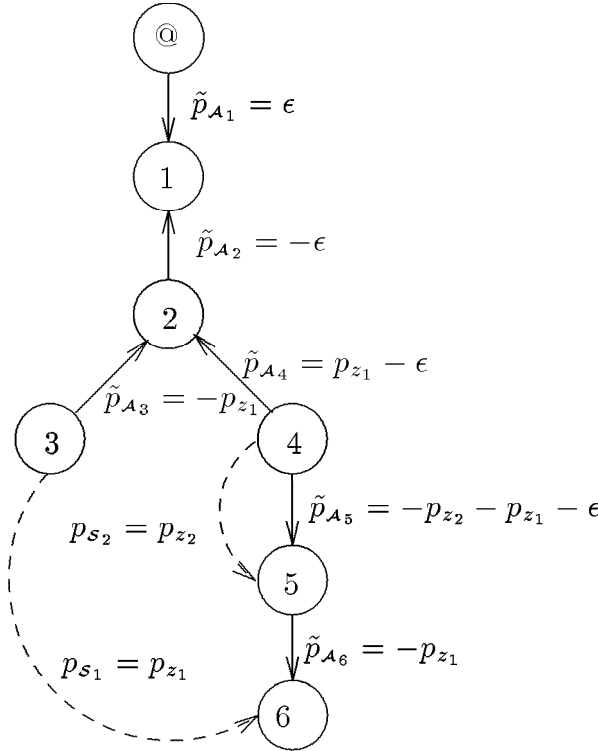
Els primers procediments de càlcul de les components bàsiques de la passa  $p = Zp_z$ ,  $p_{\mathcal{B}} = -B^{-1}Sp_z$  que es van proposar (A4.17 i A4.18), consistien en la realització de les següents operacions :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} \quad & \gamma_{\mathcal{A}} \longleftarrow -A_{\mathcal{S}}p_{z_x} \\
 \mathbf{2} \quad & \gamma_{\mathcal{T}} \longleftarrow -T_{\mathcal{S}}p_{z_x} - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}p_{z_z} \\
 \mathbf{3} \quad & p_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{A4.6}}{\stackrel{\text{A4.7}}{\longleftarrow}} B^{-1}\gamma
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

on la passa **3** es podia realitzar amb qualsevol dels dos algorismes indicats. Si es decideix usar A4.7, per exemple, seguint les passes **1** i **5** de A4.7, les components clau del vector  $p_{\mathcal{B}}$  es calcularien segons :

$$p_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma_{\mathcal{A}} - \Theta_c p_{c_x} = A_{\mathcal{A}}^{-1}(-A_{\mathcal{S}}p_{z_x}) - \Theta_c p_{c_x} \tag{4.39}$$

Durant la resolució de  $A_{\mathcal{A}}^{-1}\gamma_{\mathcal{A}}$ , i malgrat l'ús de tècniques especialitzades de fluxos en xarxes, els errors de cancel·lació provoquen discrepàncies entre la solució exacta del sistema  $A_{\mathcal{A}}\gamma_1 = \gamma_{\mathcal{A}}$  i la solució calculada  $\tilde{\gamma}_1$ . Suposem que, degut a aquest fet, la component  $\gamma_{1_i}$  té associada una component calculada  $\tilde{\gamma}_{1_i} = \gamma_{1_i} + \epsilon$ . Aquesta situació provocaria un error  $\epsilon$  a  $p_{\mathcal{A}_i}$  que es propagaria per l'arbre generador, afectant a altres arcs clau. Si aquest error propagat arriba a afectar a un arc  $\mathcal{B}_j$  que no forma part de cap cicle ( $\mathcal{B}_j \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cup \overset{\circ}{\mathcal{S}}$ ), llavors s'obtindria un valor calculat de  $p_{\mathcal{A}_j}$  diferent de zero. Això pot provocar, sota certes condicions, una pivotació sobre la variable  $\mathcal{B}_j$  que proporcionaria una nova base singular. Per il·lustrar aquest fet, considerem que volem calcular la passa  $p_{\mathcal{A}}$  d'un problema (FNCL)



**Figura 4.1 :** Error numèric en el càlcul de  $p_{\mathcal{A}}$

amb un graf  $\mathcal{G}$  amb sis nusos ( $m = 6$ ) a una iteració  $k$  amb una base  $A_{\mathcal{A}}$  corresponent a l'arbre generador de la figura 4.1.

Considerem que no hi ha arcs no clau ( $c_x^k = 0$ ) i que el conjunt de variables superbàsiques està format per dos arcs superbàsics ( $s_x^k = 2, s_z^k = 0$ ), amb nusos origen i destí  $o(s_1) = 3, d(s_1) = 6, o(s_2) = 4$  i  $d(s_2) = 5$ . Aleshores, l'expressió (4.39) es redueix a :

$$p_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{A}}^{-1}(-A_S p_{z_x}) = -A_{\mathcal{A}}^{-1}(a_{s_1} p_{z_1} + a_{s_2} p_{z_2}) = -A_{\mathcal{A}}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{z_1} \\ p_{z_2} \\ -p_{z_2} \\ -p_{z_1} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

el producte  $A_{\mathcal{A}}^{-1}v$  es pot calcular a partir de part de l'estructura de dades que descriu l'arbre generador de la figura 4.1, en concret, del vector de predecessors  $ipr$  i del vector travessar invers  $iti$  :

$$ipr = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +7 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ +4 \\ +5 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad iti = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

El vector de *ipr* coincideix amb el vector “Predecessor” descrit a [7] i el vector *iti* es defineix de forma similar al vector “inverse preorder function” de [37]. L'algorisme que, a partir dels vectors *iti* i *ipr*, i del vector  $v(1 : m + 1)$  torna, sobre el mateix vector  $v$ , el valor de  $A_{\mathcal{A}}^{-1}v$  és :

```

i := iti(m + 1)
while i ≠ m + 1 do
  r := v(i); j := ipr(i)
  if j < 0 then j := -j
    else v(i) := -v(i)
  v(j) := v(j) + r; i := iti(i)
end
    
```

Si s'aplica aquest algorisme sobre el vector  $v = [0 \quad 0 \quad p_{z_1} \quad p_{z_2} \quad -p_{z_2} \quad -p_{z_1} \quad 0]$ , l'evolució al llarg de les diferents iteracions és :

**Iter. 0**  $i := iti(7) = 6$

**Iter. 1**  $j := ipr(6) = +5;$

$v(6) := -v(6) = +p_{z_1};$

$v(5) := -p_{z_2} - p_{z_1} + \epsilon;$

$i := iti(6) = 5.$

**Iter. 2**  $j := ipr(5) = +4;$

$v(5) := -v(5) = +p_{z_2} + p_{z_1} - \epsilon;$

$v(4) := p_{z_2} - (p_{z_2} + p_{z_1} - \epsilon) =$   
 $= -p_{z_1} + \epsilon;$

$i := iti(5) = 4.$

**Iter. 3**  $j := ipr(4) = -2;$

$v(2) := -p_{z_1} + \epsilon;$

$i := iti(4) = 3.$

**Iter. 4**  $j := ipr(3) = -2;$

$v(2) := (-p_{z_1} + \epsilon) + p_{z_1} = \epsilon;$

$i := iti(3) = 2.$

**Iter. 5**  $j := ipr(2) = -1;$

$v(1) := \epsilon;$

$i := iti(2) = 1.$

**Iter. 6**  $j := ipr(1) = +7;$

$v(1) := -\epsilon;$

$v(7) := \epsilon;$

$i := iti(1) = 7.$

**Iter. 7**  $i = m + 1.$

Els escalars  $\epsilon$  representen els errors de cancel·lació de les operacions aritmètiques

efectuades. El resultat d'aquest algorisme és una passa calculada  $\tilde{p}_{\mathcal{A}}$  amb valor :

$$\tilde{p}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ -\epsilon \\ -p_{z_1} \\ p_{z_1} - \epsilon \\ -p_{z_2} - p_{z_1} - \epsilon \\ -p_{z_1} \end{bmatrix}$$

on es pot apreciar clarament l'error en les components  $\tilde{p}_{\mathcal{A}_1}$  i  $\tilde{p}_{\mathcal{A}_2}$ , comparant-les amb les mateixes components de l'expressió (4.40). La variació de fluxos  $\tilde{p}_{\mathcal{A}}$  està indicada a la figura 4.1, junt amb la passa superbàsica  $p_{\mathcal{S}}$ . El valor de l'error de cancel·lació  $\epsilon$ , tot i ser petit, pot arribar a ser significatiu i, en qualsevol cas, obliga a establir sistemes refinats de filtratge de passes petites que no sempre assegurin l'eliminació de possibles problemes, doncs l'estimació de l'error comés en la resolució de (4.39) no és trivial. En un dels casos observats, que correspon a l'arbre de la figura 4.1 on el valor de les components de  $p_z$  era de  $p_{z_1} = 5.948 \times 10^{-6}$  i  $p_{z_2} = 2766.4856$ , el valor de l'error propagat cap a l'arrel va ser de  $\epsilon \approx 2.5 \times 10^{-14}$ . Això només amb dos arcs superbàsics i un arbre molt petit. Obviament, a mida que augmenta la dimensió del problema, l'error es fa més important. El problema que acabem de descriure es pot evitar amb l'ús explícit dels cicles  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  mitjançant l'aplicació de l'algorisme A4.19, com es demostra en la següent proposició:

**Proposició 4.1 :** Sigui  $p_{\mathcal{B}} = -B^{-1}Sp_z$  la direcció de descens de les variables bàsiques. Sigui  $p_{\mathcal{A}}$  el valor exacte de les components clau de  $p_{\mathcal{B}}$  i  $\tilde{p}_{\mathcal{A}}$  el valor calculat segons l'algorisme A4.19. Aleshores, es satisfà :

$$\forall \mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cup \overset{\circ}{\mathcal{S}} \Rightarrow \tilde{p}_{\mathcal{A}_i} = p_{\mathcal{A}_i} = 0$$

*Demostració:* L'expressió de  $p_{\mathcal{A}}$  segons (4.31) és :

$$p_{\mathcal{A}} = -\Theta_{\mathcal{S}}p_{z_x} - [\Theta_{\mathcal{C}}|\mathbf{0}]Q^{-1}(T_{\mathcal{A}}\Theta_{\mathcal{S}}p_{z_x} - T_{\mathcal{S}}p_{z_x} - \mathbf{I}_{\mathcal{S}}p_{z_z})$$

on  $p_{z_x}$  i  $p_{z_z}$  indiquen les components de  $p_z$  associades a  $\mathcal{S}_x$  i  $\mathcal{S}_z$ . Tenint en compte que el resultat de l'expressió entre parèntesi del membre de la dreta és la direcció de moviment de les variables no clau s'obté  $p_{\mathcal{A}} = -\Theta_{\mathcal{S}}p_{z_x} - \Theta_{\mathcal{C}}p_{\mathcal{C}_x}$ . L'algorisme A4.19 resol els dos productes amb les matrius de cicles  $\Theta_{\mathcal{C}}$  i  $\Theta_{\mathcal{S}}$  aplicant els algorismes A4.1 i A4.2 que verifiquen la propietat 4.1. Segons aquesta

propietat, si  $\mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}} \cup \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  llavors la component  $i$ -èssima calculada de  $\Theta_c p_{z_x}$  i  $\Theta_c p_{c_x}$  és exactament zero, i consegüentment  $\tilde{p}_{\mathcal{A}_i} = 0$  ■

Es pot establir una proposició equivalent pel problema (FLCL). En aquest cas, la direcció de cerca ve donada pel vector  $B^{-1}m_q$ . Si aquest vector és calculat segons l'algorisme A4.9, un raonament anàleg al de la demostració de la proposició anterior conclou que si  $\mathcal{A}_i \notin \overset{\circ}{\mathcal{Q}} \cup \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ , sent  $x_q$  la variable no bàsica entrant, aleshores  $\tilde{p}_{\mathcal{A}_i} = 0$ .

## 4.2.6 Conclusions.

Al llarg de les seccions precedents s'han desenvolupat i comparat diferents algorismes pel tractament dels productes amb la inversa de la matriu bàsica del problema (FNCL) i amb les matrius  $Z$  i  $Z'$ . Com a resultat d'aquest estudi s'han deduït les següents expressions, que representen la diferència de cost computacional a la iteració  $k$ -èssima entre el tractament de les operacions esmentades sense i amb l'ús d'una representació explícita dels cicles no clau i superbàsics :

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(B^{-1}v)^k &= \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v) m + 2\kappa(A_c v) c_x^k - \kappa(A4.1)l_c^k \\
 \psi(B^{-1}m_{q \leq \bar{n}})^k &= \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v) m + 2\kappa(A_c v) c_x^k - \kappa(\theta_q) \|\theta_q^k\|_1 - \kappa(A4.1)l_c^k \\
 \psi(B^{-1}m_{q > \bar{n}})^k &= \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v) m + \kappa(A_c v) c_x^k - \kappa(A4.1)l_c^k \\
 \psi(v'B^{-1})^k &= \kappa(v'A_{\mathcal{A}}^{-1}) m + 2\kappa(v'A_c) c_x^k - \kappa(A4.3)l_c^k \\
 \psi(e_i^{m'} B^{-1})^k &= \kappa(e_i^{m'} A_{\mathcal{A}}^{-1}) m + 2\kappa(v'A_c) c_x^k - \kappa(e_i^{m'} \Theta_c) l_c^k \\
 \psi_a(Zv)^k &= 2\kappa(A_S v) s_x^k + 2\kappa(A_c v) c_x^k + 2\kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v) m - \kappa(A4.1)l_c^k - \kappa(A4.2)l_S^k \\
 \psi_b(Zv)^k &= 2\kappa(A_S v) s_x^k + \kappa(A_{\mathcal{A}}^{-1}v) m - \kappa(A4.2)l_S^k
 \end{aligned} \right\} (4.41)$$

l'interés d'aquestes expressions és :

- 1.- *Teòric* : posen de manifest el fet que el treball directe amb  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  no sempre és convenient, doncs depèn del valor de  $c_x^k$ ,  $s_x^k$ ,  $l_c^k$  i  $l_S^k$  i de les característiques de la implementació computacional (constants  $\kappa$ ).
- 2.- *Pràctic* : per a cada implementació computacional les expressions (4.41) permeten decidir, a cada iteració de l'algorisme A3.1, quina opció de càlcul

(amb o sense l'ús explícit de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ ) té un cost computacional menor, si es disposa d'una estimació de les constants  $\kappa$ .

D'altra banda, s'ha demostrat que els algorismes que treballen amb  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$  proporcionen solucions calculades sense certs errors numèrics que poden ser especialment greus durant el procés d'optimització.

### 4.3 Resolució de sistemes d'equacions amb la base de treball.

Els algorismes descrits a les seccions anteriors necessiten disposar de mètodes de resolució de sistemes d'equacions  $Qw = v$  i  $w'Q = v'$  on  $Q$  és la base de treball del problema (FNCL) definida a (4.9) :

$$Q = [T_c \quad | \quad \mathbf{I}_c] - T_A A_A^{-1} [A_c | \mathbf{0}] = [T_c - T_A \Theta_c \quad | \quad \mathbf{I}_c] \quad (4.42)$$

La inversa de la matriu  $Q$  es calcula cada cert nombre d'iteracions i es manté actualitzada com a producte de matrius etas, afegint un matriu eta cada vegada que es realitza una pivotació. El procés d'actualització de  $Q$  per pivotacions ha estat descrit a la secció 3.2.2. Cada cert nombre d'iteracions, la inversa de la matriu  $Q$  ha d'ésser recalculada de nou, per tal d'evitar tant el creixement excessiu de l'error numèric com el cost computacional associat al producte per les etes d'actualització.<sup>3</sup> Aquesta secció està dedicada a la descripció de les tècniques proposades per a la “reinversió” de  $Q$ . La forma habitual de resoldre el problema de “reinvertir” les matrius necessàries al llarg del procés de d'optimització acostuma a ser, o bé el càlcul de les matrius etes d'inversió (Luenberger [55], pàg. 65), o bé el càlcul dels seus factors  $LU$  (Chvátal [14], pàgs. 109-111), de forma que, en aquest últim cas, els sistemes  $Qw = v$  i  $w'Q = v'$  es poden resoldre a partir dels factors  $L$  i  $U$  per substitució directa i inversa (Duff et al.[27]). A part de la factorització  $LU$ , de la qual existeixen nombroses implementacions a les llibreries habituals de càlcul numèric (per exemple, rutines F01BRF i F04AXF de la llibreria NAG), es proposa l'ús de

---

<sup>3</sup> Es pot trobar una discussió sobre la freqüència òptima de reinversió al text de Chvátal [14], pàg. 111 a 113.

la forma en producte de la inversa com a mètode alternatiu de reinversió i resolució dels sistemes d'equacions amb la matriu  $Q$ .

### 4.3.1 Forma en Producte de la Inversa (FPI).

La Forma en Producte de la Inversa (FPI) (Luenberger [55]), consisteix en el càlcul de la inversa d'una matriu no singular, com a producte d'un conjunt de *matrius eta*  $E_i$  :

$$Q^{-1} = \prod_{t \geq i \geq 1} E_i \quad (4.43)$$

on  $E_i$  representa la matriu eta associada a la columna  $i$ -èssima de la matriu  $Q$ . Un cop expressada  $Q^{-1}$  segons (4.43) els sistemes d'equacions  $Qw = v$  i  $w'Q = v'$  poden ésser resolts directament per producte amb les matrius eta :

$$\begin{aligned} Qw = v \quad ; \quad w &= \prod_{t \geq i \geq 1} E_i v \\ w'Q = v' \quad ; \quad w' &= v' \prod_{t \geq i \geq 1} E_i \end{aligned} \quad (4.44)$$

Si indiquem per  $v$  la columna de la matriu  $\prod_{i-1 \geq j \geq 1} E_j Q$ , l'expressió de  $E_i$  ve donada per ([55], eq. (38)) :

$$E_i = \begin{matrix} & 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & t \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ t \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & -v_1/v_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -v_2/v_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -v_{i-1}/v_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/v_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{i+1}/v_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -v_t/v_i & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{matrix} \quad (4.45)$$

La columna  $i$ -èssima de  $E_i$  s'anomena *vector eta* i s'indica amb  $\eta$ .  $v_i$  és l'*element pivotal*.

Sigui un vector  $x \in \mathbb{R}^t$  i la matriu  $E_i$  anterior. El vector  $y = E_i x$  té les següents components :

$$y = E_i x \quad , \quad y_j = \begin{cases} x_j + \eta_j x_i & \forall j \neq i \\ \eta_i x_i & j = i \end{cases} \quad (4.46)$$

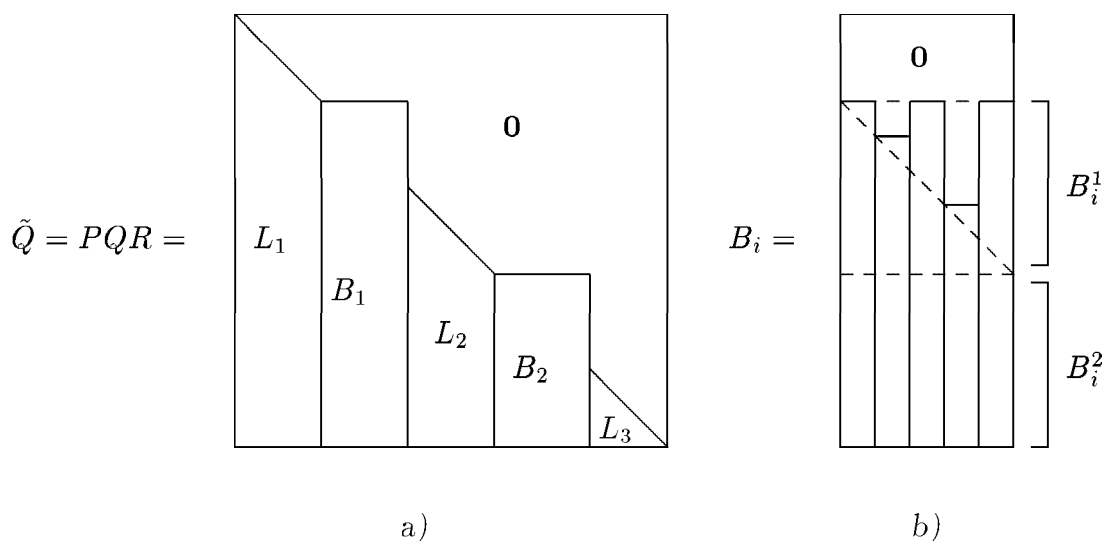
Les següents propietats provenen directament de la inspecció de (4.46) :

**Propietat 4.2 :** un vector  $x \in \mathbb{R}^t$  es invariant sota productes amb matrius eta si l'element  $x_i$  corresponent a la fila de l'element pivotal és  $x_i = 0$ .

**Propietat 4.3 :** la component  $j$ -èssima de  $E_i x$  no es modifica si  $\eta_j = 0$ .

### 4.3.2 Algorisme de Hellerman i Rarick.

Donada una matriu general  $Q \in \mathbb{R}^{t \times t}$ , l'algorisme  $P^3$  (“Preassigned Pivot Procedure”) de Hellerman i Rarick [43] proporciona una ordenació de files i columnes prèvia al calcul de les etes d'inversió o de triangularització que permet expressar  $Q$  com a matriu “quasi” triangular. Siguin  $P$  i  $R$  les matrius de permutació corresponents a l'ordenació de files i columnes, respectivament, donada per l'algorisme  $P^3$ . Les columnes de la matriu resultant de l'ordenació,  $\tilde{Q} = PQR$  estan agrupades en un cert nombre de submatrius subdiagonals  $L_i$  i submatrius rectangulars  $B_i$ , anomenades *gepes* (“bumps”).



**Figura 4.2 :** Ordenació de Hellerman i Rarick. a) Exemple reordenació  $P^3$ . b) estructura interna matriu  $B_i$ .



La figura 4.2 a) mostra l'aspecte que podria tenir una matriu  $\tilde{Q}$  amb dues gepes. Sigui la gepa  $i$ -èssima  $B_i$  formada per les columnes  $k$  a  $l$  de la matriu  $\tilde{Q}$  :

$$B_i = \begin{matrix} & k & k+1 & \dots & l \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \vdots \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{q}_k^k & \tilde{q}_{k+1}^k & \dots & \tilde{q}_l^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_k^t & \tilde{q}_{k+1}^t & \dots & \tilde{q}_l^t \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.47)$$

Les columnes de  $B_i$  poden ésser subdiagonals o tenir elements no nuls sobre la diagonal, essent anomenades en aquest cas columnes *punxa*. Les columnes 3 i 5 de la matriu  $B_i$  de la figura 4.2 a) són columnes *punxa*.

L'ordenació exhibida per la matriu  $\tilde{Q}$  a la figura 4.2 presenta unes propietats que la fan especialment apropiada pel procés de càlcul de les etes d'inversió o triangularització. Aquestes propietats es demostraran als següents apartats, junt amb la descripció del procés de càlcul de les etes d'inversió. Al llarg d'aquestes seccions  $\tilde{q}_j^i$  indicarà l'element  $(i, j)$  de  $\tilde{Q}$ .

### 4.3.3 Etes d'inversió de $L_i$ .

Sigui  $\tilde{q}_j$  la columna  $j$ -èssima de  $\tilde{Q}$ , i considerem  $\tilde{q}_j \in L_i$ . Siguin  $E_i, i = 1, \dots, j-1$  les etes d'inversió de les primeres  $j-1$  columnes de  $\tilde{Q}$ . La matriu eta  $E_j$  s'haurà de calcular segons (4.45) a partir del vector  $v = \prod_{j-1 \geq i \geq 1} E_i \tilde{q}_j$ . Aleshores, la següent proposició es satisfà :

**Proposició 4.2 :** si  $\exists i : \tilde{q}_j \in L_i \Rightarrow v = \tilde{q}_j$ .

*Demostració:* Si  $\tilde{q}_j \in L_i$ , llavors  $\tilde{q}_j^i = 0 \ i = 1, \dots, j-1$ . Tenint en compte que les etes  $E_i, i = 1, \dots, j-1$  tenen fila pivotal  $i > j$ , aplicant la propietat 4.2 tenim  $v = \tilde{q}_j$  ■

El fet que les columnes fora gepa no s'hagin de premultiplicar per les etes prèvies té com a conseqüència, a part de l'estalvi de temps, que a les submatrius  $L_i$  no es produeixi

l'aparició d'elements no nuls nous durant el procés d'inversió, mantenint-se així el seu grau d'esparsitat.

#### 4.3.4 Etes d'inversió de $B_i$ .

Considerem la gepa  $i$ -èssima de l'equació (4.47), formada per les columnes  $k$  a la  $l$  de  $\tilde{Q}$ . Les següents proposicions afecten al calcul de les etes d'inversió de columnes de  $B_i$ :

**Proposició 4.3 :** Sigui  $\tilde{q}_j \in B_i$ . Si  $j$  no és columna punxa aleshores  $v = \prod_{j-1 \geq i \geq 1} \tilde{q}_j = \tilde{q}_j$ .

*Demostració:* La demostració és idèntica a la proposició P4.2 .

**Proposició 4.4 :** si  $\tilde{q}_j \in B_i$  i és columna punxa, aleshores  $v = \prod_{j-1 \geq i \geq k} E_i \tilde{q}_j$ .

*Demostració:* si  $\tilde{q}_j$  és punxa llavors  $\tilde{q}_j^i = 0 \forall i < k$ . Aplicant la propietat 4.2 s'obté  $E_i \tilde{q}_j = \tilde{q}_j, i < k \Rightarrow v = \prod_{j-1 \geq i \geq 1} E_i \tilde{q}_j = \prod_{j-1 \geq i \geq k} \tilde{q}_j$  ■

Segons aquestes proposicions, en tractar una columna qualsevol pertanyent a la gepa actual, no cal premultiplicar per les etes de les columnes prèvies a la dita gepa  $i$ , a més, si la columna de la gepa actual no és punxa, llavors cap eta prèvia l'afecta, no havent-se d'executar cap producte. D'aquestes proposicions s'indueix, a més, que l'esparsitat de les etes de columnes no punxa de  $B_i$  no es degrada, mentre que, en general, si que es degradarà en columnes punxa. Existeix una forma d'intentar minvar aquesta degradació procedint a realitzar una inversió "per parts", que es descriurà a continuació, tal com s'indica a [43]. Sigui la gepa  $B_i = (\tilde{q}_k \dots \tilde{q}_l)$ . Distingirem dins de la matriu gepa  $B_i$  dues submatrius, la *gepa externa*  $B_i^E$ , formada per les files  $k$  a  $l$ , i la *gepa interna*  $B_i^I$ , formada per les files

$l+1$  a  $t$ :

$$B_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hline B_i^E \\ \hline B_i^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{q}_k^k & \tilde{q}_{k+1}^k & \cdots & \tilde{q}_l^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_k^l & \tilde{q}_{k+1}^l & \cdots & \tilde{q}_l^l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{q}_k^{l+1} & \tilde{q}_{k+1}^{l+1} & \cdots & \tilde{q}_l^{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{q}_k^t & \tilde{q}_{k+1}^t & \cdots & \tilde{q}_l^t \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Considerem el conjunt de matrius eta que invertirien  $B_i$ :

$$E_l \cdots \cdots E_k B_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{(k-l+1)(k-l+1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Sigui la matriu eta  $E_j$ ,  $j \in \{k, \dots, l\}$  amb vector eta  $\eta_j$  corresponent a la columna  $\tilde{q}_j$ . Associada a  $E_j$  es defineix la matriu eta externa  $E_j^E$  com:

$$E_j^E = \begin{matrix} & 1 & \cdots & k-1 & k & \cdots & j & \cdots & l & l+1 & \cdots & t \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ l \\ l+1 \\ \vdots \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \eta_j^k & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \eta_j^j & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \eta_j^l & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.49)$$

Es pot veure fàcilment que :

$$E_i^E \cdot \dots \cdot E_k^E \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \overline{B_i^E} \\ \overline{B_i^I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \overline{B_i^I} \end{pmatrix}$$

Durant aquesta primera fase d'inversió els productes per les *etes* externes poden provocar l'aparició de nous elements només a la zona de la gega externa, però no a la gega interna.

La segona fase de la inversió, que eliminarà els elements de la gega interna, es du a terme multiplicant per les *etes internes*. Es defineix la *eta interna* associada a la columna  $\tilde{q}_j$  de  $B_i$  com :

$$E_j^I = \begin{matrix} & 1 & \dots & k-1 & k & \dots & j & \dots & l & l+1 & \dots & t \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ l \\ l+1 \\ \vdots \\ t \end{matrix} & \left( \begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\tilde{q}_j^l & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\tilde{q}_j^t & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (4.50)$$

Es també directe comprovar que :

$$E_l^I \cdot \dots \cdot E_k^I \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \overline{B_i^I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \overline{B_i^I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Mitjançant aquest procediment es pretén disminuir el nombre d'elements nous creats per productes per matrius eta dins de la gega externa. Tanmateix, aixó només

s'aconseguirà si es satisfà :  $\sum_{j=k}^l (|\eta_j| - |\eta_j^E|) > \sum_{j=k}^l |\eta_j^I|$ , on  $|x|$  indica el nombre d'elements no nuls de  $x$ .

### 4.3.5 Pivotació parcial.

Simultàniament al procés de càlcul de les etes externes es pot realitzar una pivotació parcial en columnes de  $B_i$  per intentar millorar l'estabilitat numèrica de les operacions amb les etes d'inversió, estabilitat que empitjora a mida que augmenta el valor absolut dels elements del vectors eta. Sigui  $\bar{\eta}$  el màxim valor admissible dels elements  $\eta_j^i$ . Consideri's que ja s'han processant les  $(j - 1)$  primeres columnes de  $\tilde{Q}$ , que la columna  $\tilde{q}_{j-1}$  pertany a la gepa  $B_i = (\tilde{q}_k \dots \tilde{q}_l)$ , i que es vol decidir quina de les darreres  $l - j + 1$  columnes de  $B_i$  processar en la posició  $j$ -èssima. Consideri's la columna  $q_m$ ,  $m \geq j$ , i la seva transformació per productes amb les etes prèvies  $v_m = \prod_{j-1 \geq r \geq k} E_r \tilde{q}_m$ . Es defineix  $\bar{v}_m = \max_{i \neq j} \{ |v_m^i| \}$ , la component de  $v_m$  amb major valor absolut. Es defineix  $\mathcal{B}_{s_i}$  com el conjunt d'índexos de columnes de  $\tilde{Q}$  que són columna punxa de  $B_i$ . Llavors es seleccionarà com a columna a ser processada en la posició  $j$ -èssima la corresponent a :

$$\min_{m \in \mathcal{B}_{s_i}, j \leq m \leq l} \{m : (\bar{v}_m / |v_m^j|) < \bar{\eta}\}$$

és a dir, la primera columna punxa posterior a la columna  $(j - 1)$ -èssima de  $\tilde{Q}$  que té associat un vector eta amb elements menors que  $\bar{\eta}$  en valor absolut. Si no n'existeix cap es selecciona la columna  $m$  que provoca un vector  $\eta$  el mínim valor absolut de les components del qual és el màxim de entre totes les columnes punxa posteriors a la  $(j - 1)$ -èssima, és a dir :

$$\max_{m \in \mathcal{B}_{s_i}} \{ \min_{j \leq m \leq k} \bar{v}_m / |v_m^j| \}$$

Si el resultat d'aquest procés és la selecció d'un índex  $m > j$ , es permuten les columnes  $j$  i  $m$  de  $\tilde{Q}$ . Noti's que aquesta permutació previa al calcul de les etes  $E_j^E$  i  $E_j^I$  només afecta a la matriu  $R$  obtinguda mitjançant l'algorisme de Hellerman i Rarick.

## 4.4 Actualització dels cicles $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ i $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ .

L'aplicació dels algorismes desenvolupats al llarg de la secció 4.2 necessita que es mantingui actualitzada la representació dels cicles  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  i de la inversa de la base de treball, o els seus factors  $LU$ . El procés d'actualització de la base de treball per pivotació ja va ésser descrit amb anterioritat per diversos autors i ha estat recollit a la secció 3.2.2. Ens preocuparem dins d'aquesta secció dels procediments que permeten actualitzar els cicles no claus i superbàsics.

Consideri's el procés de resolució del problema (**FNCL**) mitjançant l'algorisme A3.1. Si a la iteració  $k$ -èssima es decideix relaxar la fita de la variable no bàsica  $x_q$ , hom haurà de calcular el cicle  $\overset{\circ}{q}$  associat a  $x_q$  i afegir-lo al conjunt de cicles superbàsics  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ :

$$\text{AC 1.- } \boxed{q \in \mathcal{N}_x \rightarrow \mathcal{S}_x} : \\ \text{Calcular } \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k \cup \{\overset{\circ}{q}\}$$

Si es produeix una pivotació entre una variable superbàsica  $x_q$  i una variable bàsica  $x_p$ , l'actualització dels cicles no clau  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i superbàsics  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  depèn del tipus de pivotació feta, originant-se diferents casos d'actualització segons la variable  $p$  de sortida de la base sigui  $p \in \mathcal{A}$ ,  $p \in \mathcal{C}_x$  o  $p \in \mathcal{C}_z$ . Considerem el canvi de base  $\mathcal{B}^k \rightarrow \mathcal{B}^{k+1}$ . Els supraindexos  $k$  i  $k+1$  aplicat sobre un conjunt indiquen la base a la que aquest conjunt està associat. Si la variable de sortida  $p$  és una variable no clau aleshores l'actualització de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^k$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}^k$  es redueix a fer un transvàs dels cicles  $\overset{\circ}{q}^k$  i  $\overset{\circ}{p}^k$  entre  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}^k$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}^k$ , sense que hom hagi de calcular

cap cicle nou, doncs els arcs clau  $\mathcal{A}$  no canvien :

AC 2.-  $\boxed{p \in \mathcal{C}_z}$  : la variable de sortida és una folga.

AC 2.1.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_z}$  : la variable d'entrada és una folga superbàsica.

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^k \quad ; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k$$

AC 2.2.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_x}$  : la variable d'entrada és un arc superbàsic.

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^k \cup \{\overset{\circ}{q}^k\} \quad ; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k \setminus \{\overset{\circ}{q}^k\}$$

AC 3.-  $\boxed{p \in \mathcal{C}_x}$  : la variable de sortida és un arc no clau.

AC 3.1.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_z}$  : la variable d'entrada és una folga superbàsica.

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^k \setminus \{\overset{\circ}{p}^k\} \quad ; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k$$

AC 3.2.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_x}$  : la variable d'entrada és un arc superbàsic.

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^k \setminus \{\overset{\circ}{p}^k\} \cup \{\overset{\circ}{q}^k\}; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k \setminus \{\overset{\circ}{q}^k\}$$

Si la variable de sortida és un arc clau ( $p \in \mathcal{A}$ ), aleshores l'actualització de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  no es redueix a l'addició o substracció dels cicles dels arcs implicats en la pivotació, doncs un canvi de  $\mathcal{A}$  implica modificar part de l'arbre generador, la qual cosa pot afectar a un nombre arbitrari de cicles de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ . Hom defineix les llistes  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_p$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_p$  d'arcs no clau i superbàsics que formen cicle amb l'arc clau sortint :

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathcal{C}_x : p \in \overset{\circ}{c}_{xi}\} \quad ; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathcal{S}_x : p \in \overset{\circ}{s}_{xi}\} \quad (4.51)$$

Els únics cicles que hauran de ser actualitzats són els dels arcs de les llistes  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_p^k$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}_p^k$ , doncs si un arc  $i \notin \overset{\circ}{\mathcal{C}}_p^k \cup \overset{\circ}{\mathcal{S}}_p^k$ , llavors el seu cicle bàsic no es pot veure afectat per una pivotació on s'elimini l'arc clau  $p$ . El procés d'actualització en aquest cas és :

AC 4.-  $\boxed{p \in \mathcal{A}}$  : la variable de sortida és un arc clau.

AC 4.1.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_z}$  : la variable d'entrada és una folga superbàsica.

Seleccionar  $j \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_p^k$  per intercanviar amb  $p$ .

$$\mathcal{A}^{k+1} := \mathcal{A}^k \setminus \{p\} \cup \{j\} \quad ; \quad \mathcal{C}^{k+1} := \mathcal{C}^k \cup \{p\} \setminus \{j\}$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^k \setminus \{\overset{\circ}{j}\} \quad ; \quad \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^k.$$

Per a tot arc  $l \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_p^k$ ,  $l \neq j$  fer

Calcular  $\overset{\circ}{l}^{k+1}$ , cicle de  $l$  associat a  $\mathcal{A}^{k+1}$

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{C}}^{k+1} \cup \{\overset{\circ}{l}^{k+1}\} \setminus \{\overset{\circ}{l}^k\}$$

Per a tot arc  $l \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}_p^k$  fer

Calcular  $\overset{\circ}{l}^{k+1}$ , cicle de  $l$  associat a  $\mathcal{A}^{k+1}$

$$\overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} := \overset{\circ}{\mathcal{S}}^{k+1} \cup \{\overset{\circ}{l}^{k+1}\} \setminus \{\overset{\circ}{l}^k\}$$

AC 4.2.-  $\boxed{q \in \mathcal{S}_x}$  :la variable d'entrada és un arc superbàsic.

AC4.2.1.-  $\boxed{\text{Si } \mathring{\mathcal{C}}_p^k = \emptyset}$  : pivotació directa  $p \leftrightarrow q$

$$\mathcal{A}^{k+1} := \mathcal{A}^k \setminus \{p\} \cup \{q\} \quad ; \quad \mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \setminus \{q\}$$

$$\mathring{\mathcal{C}}^{k+1} := \mathring{\mathcal{C}}^k \quad ; \quad \mathring{\mathcal{S}}^{k+1} := \mathring{\mathcal{S}}^k.$$

Per a tot arc  $l \in \mathring{\mathcal{S}}_p^k$  fer

Calcular  $\mathring{l}^{k+1}$ , cicle de  $l$  associat a  $\mathcal{A}^{k+1}$

$$\mathring{\mathcal{S}}^k := \mathring{\mathcal{S}}^k \cup \{\mathring{l}^{k+1}\} \setminus \{\mathring{l}^k\}$$

AC4.2.2.-  $\boxed{\text{Si } \mathring{\mathcal{C}}_p^k \neq \emptyset}$  : intercanvi previ  $p \leftrightarrow j \in \mathring{\mathcal{C}}_p^k$

Aplicar cas AC 4.1.

$$k := k + 1.$$

Aplicar cas AC 3.2



## CAPÍTOL 5

# Implementació de l'algorisme de resolució del problema (FNCL).

El capítol 4 s'ha dedicat a l'estudi dels procediments que permeten aprofitar l'estructura del problema (FNCL). Dins d'aquest capítol es descriurà amb detall el disseny de les passes de l'algorisme A3.1 tal com han estat implementades al codi NOXCB 9.0. El disseny i discussió dels procediments presentats a aquest capítol recullen gran part de l'experiència computacional adquirida al llarg del procés de desenvolupament del codi NOXCB 9.0, motiu pel qual pensem que tenen especial interès.

### 5.1 Càlcul de solucions factibles inicials.

El procediment de càlcul de solucions factibles inicials que s'ha desenvolupat es basa en el mètode de les dos fases. La variació introduïda consisteix en una subdivisió de la fase 1 en dues fases, anomenades *fase 0* i *fase 1*:

*Fase 0*: consisteix en el càlcul d'una solució factible respecte de les equacions de xarxa (2.1b) del problema (FNCL), és a dir, del càlcul de  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  tal que  $A\hat{x} = r$ ,  $0 \leq \hat{x} \leq u_x$ . Hom anomena a la solució  $\hat{x}$  *solució pseudo-factible* de (FNCL). Noti's que la fase 0 que acabem de definir coincideix amb la fase 1 d'un problema de fluxos lineals purs.

*Fase 1*: consisteix en el càlcul d'una solució factible minimitzant la suma d'infactibilitats de les constriccions a banda a partir d'una solució pseudo-factible

calculada a la fase 0. Aquest és un problema de fluxos lineals amb constriccions a banda.

Aquest procediment de dos fases està detallat a continuació. Noti's que el problema definit a la passa **2.4** és un problema **(FLCL)** que pot ser resolt aplicant un codi especialitzat (NETSIDE, FXCB, CPLEX). En el nostre cas, s'ha usat el codi FXCB [44].

**Algorisme A5.1** : Càlcul d'una solució factible inicial de **(FNCL)** .

**1** (*Fase 0*) Es calcula  $\hat{x}$ , punt pseudo-factible ( $A\hat{x} = r, 0 \leq \hat{x} \leq u_x$ )

**2** (*Fase 1*) :

**2.1** Es defineixen els conjunts d'índexos de constriccions a banda violades :

$$I^+ = \{i : t^i \hat{x} > b_i\} \quad ; \quad I^- = \{i : t^i \hat{x} < (b_i - u_{z_i})\}$$

**2.2** S'afegeixen variables artificials  $f^+$  i  $f^-$ , associades a  $I^+$  i  $I^-$  respectivament, a les constriccions a banda :

$$Tx + \mathbf{I}_z z - \mathbf{I}_+ f^+ + \mathbf{I}_- f^- = b$$

**2.3** Es defineix el punt inicial  $\hat{y}$  com :

$$\begin{aligned} \hat{y}' &= [\hat{x}' \quad | \quad \hat{z}' \quad | \quad \hat{f}^{+'} \quad | \quad \hat{f}^{-'} \quad ] \\ \hat{z}_i &= \begin{cases} b_{z_i} - t^{z_i} \hat{x} & z_i \notin I^+ \cup I^- \\ 0 & z_i \in I^+ \cup I^- \end{cases} \\ \hat{f}_i^+ &= t^{i^+} \hat{x} - b_{i^+} \quad , \quad i = 1, \dots, |I^+| \\ \hat{f}_i^- &= (b_{i^-} - u_{z_{i^-}}) - t^{i^-} \hat{x} \quad , \quad i = 1, \dots, |I^-| \end{aligned}$$

**2.4** A partir del punt inicial  $\hat{y}$  es resol :

$$\begin{aligned} \min \quad z_a &= \sum_{i=1}^{|I^+|} f_i^+ + \sum_{i=1}^{|I^-|} f_i^- \\ \text{subj. to :} \quad Ax & & = r \\ Tx + \mathbf{I}_z z - \mathbf{I}_+ f^+ + \mathbf{I}_- f^- & = b \\ 0 \leq x \leq u_x ; 0 \leq z \leq u_z ; f^+, f^- & \geq 0 \end{aligned}$$

**2.5** Si  $z_a^* = 0$ , aleshores  $y^{*'} = [x^{*'} \quad | \quad z^{*'}]$  és una solució factible de **(FNCL)** .  
Si  $z_a^* > 0$ , aleshores **(FNCL)** és infactible.

## 5.2 Optimització al subespai nul de les restriccions actives.

Consideri's la iteració  $k$ -èssima de l'algorisme A3.1 aplicat a la resolució del problema (FNCL), i siguin  $\mathcal{B}^k$ ,  $\mathcal{S}^k$  i  $\mathcal{N}^k$  els conjunts d'índexos de les variables bàsiques, superbàsiques i no bàsiques corresponents a la dita iteració. A la secció 3.1.3 s'ha definit el problema d'optimització al subespai nul com la resolució del següent problema d'optimització no lineal sense restriccions sobre l'espai  $\mathbb{R}^s$ :

$$(\text{SN}\bar{M})^k \left\{ \min_{x_s \in \mathbb{R}^s} f_z(x_s) = f(x^k + Z(x_s - x_s^k)) \right.$$

l'interés d'aquest problema rau en el fet que, en absència de degeneració, qualsevol direcció de descens  $p_z$  per a (SN $\bar{M}$ ) proporciona una direcció de moviment  $p = Zp_z$  que és factible i de descens per a (FNCL). Un cop calculada la direcció de descens  $p$  a partir de  $p_z$ , s'ha de procedir a realitzar exploració lineal afitada per  $\bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_B, \bar{\alpha}_S\}$ , on  $\bar{\alpha}_B$  i  $\bar{\alpha}_S$  venen donades per les expressions (3.9) i (3.10). Si la passa màxima superbàsica  $\bar{\alpha}_S$  és menor que la passa màxima bàsica  $\bar{\alpha}_B$ , aleshores el problema (SN $\bar{M}$ ) es pot considerar com un problema d'optimització no lineal subjecte a fites simples:

$$(\text{SN}\bar{M})^k \left\{ \begin{array}{l} \min_{x_s \in \mathbb{R}^s} f_z(x_s) \\ \text{subj. a :} \\ 0 \leq x_s \leq u_s \end{array} \right. \quad (5.1)$$

L'optimització d'aquest tipus de problemes ha estat estudiat per Bertsekas ("simple constrained problem" [6], secció 1.5), i els seus resultats implementats en alguns codis d'optimització de fluxos en xarxes (Toint et al.[72]). La següent secció fa una descripció de l'estratègia de resolució d'aquests problemes, que anomenarem *Exploració Lineal de Bertsekas* o ELB.

### 5.2.1 ELB : Exploració Lineal de Bertsekas.

Sigui  $\Omega_s$  el conjunt de vectors de  $\mathbb{R}^s$  factibles respecte a les fites superbàsiques :

$$\Omega_s \stackrel{\text{def}}{=} \{x_s \in \mathbb{R}^s : 0 \leq x_s \leq u_s\}$$

Seguint el desenvolupament de Toint i Tuytens [72], donat un vector  $x_s \in \mathbb{R}^s$ , es definirà la *projecció de  $x_s$  sobre  $\Omega_s$*  com :

$$P(x_s)_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u_{si} & \text{si } x_{si} \geq u_{si} \\ 0 & \text{si } x_{si} \leq 0 \\ x_{si} & \text{altrament} \end{cases} \quad (5.2)$$

Es defineix la fita activa associada a una variable  $i$  i una direcció  $v$  com a :

$$a(v)_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \leq 0 \\ u_i & \text{si } v_i > 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Es diu que la fita  $i$ -èsima és *quasi-activa* si es satisfà :

$$|x_{si} - a(-g_z)_{si}| \leq \min\{\epsilon_{QA}, \|P(x_s - g_z) - x_s\|_2\} \quad (5.4)$$

on  $\epsilon_{QA} \in [0, 1[$ , amb valors habituals de  $\epsilon_{QA} = 10^{-5}$ . S'indicarà amb  $\mathcal{Q}$  la posició al conjunt  $\mathcal{S}$  dels índexos de les variables superbàsiques amb fites quasi-actives (és a dir,  $\mathcal{Q} \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$ ). Seguint el desenvolupament exposat a [6], es dirà que una matriu simètrica  $D \in \mathbb{R}^{s \times s}$  amb elements  $d_{ij}$  és diagonal respecte a  $\mathcal{Q}$  si :

$$d_{ij} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{Q} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad , \quad j \neq i$$

Es pot assumir sense afectar la validessa del desenvolupament que les variables superbàsiques quasi-actives són les darreres  $(n - l + 1)$  variables de  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{Q} = \{l, l + 1, \dots, n\}$ ). Llavors, la matriu  $D$  diagonal respecte a  $\mathcal{Q}$  seria :

$$D = \left[ \begin{array}{c|ccc} D & & & \mathbf{0} \\ \hline & d_l & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & d_n \end{array} \right]$$

Consideri's una passa del tipus  $x_s(\alpha) = P(x_s - \alpha Dg_z)$  amb  $\alpha \geq 0$  i  $D$  definida positiva i diagonal respecte a  $\mathcal{Q}$ . Es satisfà (proposició 1.35 de [6]) que, si  $x_s$  no és un punt estacionari, aleshores existeix un escalar  $\bar{\alpha}$  tal que, per a tot  $\alpha < \bar{\alpha}$  es satisfà :

$$f(x + Z(x_s(\alpha) - x_s)) < f(x)$$

Basat en aquest fet, Bertsekas proposà a [6] un algorisme iteratiu de descens per a problemes amb fites simples consistent en l'actualització  $x_s^{k+1} := P(x_s^k - \alpha^k D^k g_z^k)$ , amb el càlcul de l'escalar  $\alpha^k$  mitjançant una exploració lineal per retrocés. Tanmateix, el nostre problema no és un problema pur amb fites simples, doncs s'ha de tenir en compte les fites de les variables bàsiques, que imposen condicions addicionals sobre la longitud de pas  $\alpha^k$ . Toint i Tuytens proposàren a [72] una variant de l'algorisme de Bertsekas amb salvaguarda de les fites bàsiques. Sigui  $p_z$  la direcció de descens calculada segons l'expressió  $p_z = -Dg_z$ , amb  $D$  diagonal respecte al conjunt de fites quasi-actives  $\mathcal{Q}$  i definida positiva. El procés de càlcul de la direcció  $p_z$  s'estudiarà més endavant. Siguin  $\bar{\alpha}_B$  i  $\bar{\alpha}_S$  les longituds de pas màximes bàsica i superbàsica definida segons :

$$p_z = -Dg_z \quad ; \quad p_S = p_z \quad ; \quad p_B = -B^{-1}Sp_z$$

$$\bar{\alpha}_S = \min_{i \in \mathcal{S}} \left\{ \left| \frac{x_i - a(p)_i}{p_i} \right| \right\} \quad ; \quad \bar{\alpha}_B = \min_{i \in \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{x_i - a(p)_i}{p_i} \right| \right\}$$

A partir de  $x$ , donades  $\bar{\alpha}_B$ ,  $\bar{\alpha}_S$ ,  $p_S$  i  $p_B$ , l'algorisme d'exploració lineal proposat és :

**Algorisme A5.2 :** Exploració Lineal de Bertsekas.

Sigui  $\alpha^1 \geq 1$  i  $0 < \mu_{ELB} < 1$

**0** Si  $\bar{\alpha}_B < \bar{\alpha}_S$  llavors :  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_B$  Anada a **5**.

altrament :  $l = 1$ . Anada a **1**.

**1** Càlcul de  $\alpha^l$  que no viola les fites bàsiques :

**1.1** Es calcula la direcció de cerca superbàsica projectada :

$$x_S^l = P(x_S + \alpha^l p_S) \quad ; \quad p_S^l = P(x_S + \alpha^l p_S) - x_S$$

**1.2** Es calcula la direcció de cerca bàsica :  $p_B^l \stackrel{A4.17A4.18}{\leftarrow} -B^{-1}Sp_S^l$

**1.3** Es calcula  $\bar{\alpha}_B$  associada a  $p_B^l$  :  $\bar{\alpha}_B^l = \min_{i \in \mathcal{B}} \left\{ \left| \frac{x_i - a(p^l)_i}{p_i^l} \right| \right\}$

**1.4** Si  $\bar{\alpha}_B^l < 1$  llavors  $\alpha^{l+1} := \alpha^l / 2$  ;  $l := l + 1$ . Anada a **1.1**.

altrament anada a **2** .

**2** Es calcula  $f(x^l) = f(x_B + p_B^l, x_S + p_S^l, x_N)$

**3** Si  $f(x^l) \leq f(x) + \mu_{ELB} g'_z p_S^l$  : sortida amb nou punt iterat  $x := x^l$

**4** Si  $\alpha^l > \alpha_s$  llavors

si  $l = 3$  llavors  $\alpha^{l+1} := \bar{\alpha}_s$  ;  $l := l + 1$

altrament  $\alpha^{l+1} := \alpha^l/2$  ;  $l := l + 1$

anada a **1**.

altrament :

$p_B = p_B^l, p_S = p_S^l, \bar{\alpha} = 1$ . Anada a **5** .

**5** Exploració lineal a partir de  $x$  al llarg de  $p' = [p'_B | p'_S | 0]$  amb passa màxima  $\bar{\alpha}$ .

La idea de l'exploració lineal de Bertsekas consisteix en projectar la passa superbàsica original  $p_S$ , o un múltiple d'aquesta ( $\alpha^1 p_S, \alpha^1 > 1$ ), sobre la regió factible  $\Omega_S$  (passa **1.1**). Es realitzen una sèrie de projeccions, amb reducció successiva de la longitud de pas  $\alpha^l$  fins a aconseguir un punt projectat  $x^l$  que no violi les fites bàsiques (passes **1.1** a **1.4**). Un cop trobat, si la millora introduïda a la funció objectiu per la passa  $\alpha^l p_S^l$  és suficient, es pren  $x^l$  com a nou punt iterat (passa **3**)<sup>4</sup>. Si la millora és insuficient, es redueix la passa  $\alpha^l$  a la meitat i es torna a repetir el procés (passa **4**). Si els tres primers punts projectats ( $l = 3$ ) no satisfan el criteri de sortida, s'efectua exploració lineal estàndard a partir de  $x$  al llarg de la direcció inicial amb passa màxima  $\bar{\alpha} = \alpha_s$ . Aquest procediment s'aplica si  $\bar{\alpha}_B > \bar{\alpha}_S$ , fent-se exploració lineal estàndard amb passa màxima  $\bar{\alpha}_B$  en cas contrari (passa **0**). En cas que s'efectuï exploració lineal estàndard, es poden aprofitar les rutines existents a les llibreries de càlcul numèric, per exemple, rutines E04ABF i E04BBF de NAG, o la rutina d'exploració lineal GETPTC o GETPTQ que implementa MINOS 5.3. El codi NOXCB 9.0 adopta aquesta darrera opció.

## 5.2.2 Càlcul de la direcció de descens a $SN\bar{M}$ .

Durant l'exposició presentada a la secció 3.1 de l'algorisme del conjunt de constriccions actives es va indicar com a via de càlcul de les direccions de descens la resolució del següent sistema d'equacions lineals :

$$\tilde{H}_z p_z = -g_z(x) \quad (5.5)$$

---

<sup>4</sup> Noti's que la condició de sortida de la passa **3** equival a la primera condició d'Armijo-Goldstein (eq. 6.3.3a [25]).

De la teoria d'optimització no lineal es coneix que la solució d'aquest sistema proporciona direccions de descens si la matriu  $\tilde{H}_z$ , típicament una aproximació de l'Hessià reduït sobre el punt  $x$ , és definida positiva (Luenberger [55], pàgs. 226-227, Nemhauser et. al [65], pàgs 36-37). La resolució de (5.5) s'ha abordat de dues formes diferents : mitjançant el mètode de *Newton Truncat* i amb l'aplicació de una aproximació *quasi-Newton*. Si s'aplica l'estratègia de l'exploració lineal de Bertsekas, el càlcul de la direcció de descens  $p_z$  ha de tenir en compte que l'aproximació  $\tilde{H}_z$  que s'usi a (5.5) ha de ser diagonal respecte del conjunt d'índexos de fites quasi-actives  $\mathcal{Q}$ . En aquest cas els elements diagonals corresponents a les variables quasi-actives es prendran amb valor 1.

### 5.2.2.1 Mètode de Newton Truncat (MNT).

El Mètode de Newton Truncat (MNT) consisteix en la resolució aproximada del sistema d'equacions  $H_z(x)p_z = -g_z$  mitjançant l'ús del mètode del gradient conjugat (GC) (Luenberger [55], secció 8.3) amb certes condicions especials d'acabament. El MNT es basa en els estudis sobre convergència del mètode de Newton inexacte de Dembo, Stanley, Eisenstat i Steihaug [22]. Dembo i Steihaug a [24] proposaren el Mètode de Newton Truncat, un mètode de Newton inexacte pertanyent a la família descrita a [22] basat en l'ús de l'algorisme del gradient conjugat, i presentàren resultats computacionals obtinguts amb problemes convexos de 916 variables, comparant el mètode de Newton, Newton Truncat, Newton Truncat amb Diferències Finites (NTDF) i una implementació de l'algorisme de Gradient Conjugat. Dembo presentà a [20,21] el codi NLPNET, implementació d'una especialització de l'algorisme A3.1 per a la resolució del problema (FN) basat en el MNT. Escudero presentà a [30] una aplicació d'aquest algorisme a la resolució de problemes relacionats amb la Coordinació Hidro-Tèrmica, amb resultats computacionals, i Toint i Tuytens a [72] varen fer una comparació entre diverses variants del MNT i mètodes quasi-Newton. L'interès despertat per aquest mètode es deu al fet que permet assolir ordres de convergència entre 1 i 2 sense necessitat d'avaluar les segones derivades de la funció objectiu [22].

Consideri's que ens trobem a la iteració  $k$ -èssima de A3.1 amb punt iterat  $x^k$  on  $H_z^k = H_z(x^k)$  i  $g_z^k = g_z(x^k)$ . Seguint [24], pàg. 94, la direcció de descens es calcula segons el següent algorisme :

**Algorisme A5.3** : Algorisme del Mètode de Newton Truncat

Sigui  $H_z^k = H_z(x^k)$ ,  $g_z^k = g_z(x^k)$ ,  $Z^k$  i els escalars  $0 < \eta_0 < \eta_1 < 1$  i  $i_{max}$ .

**0** Inicialització

$$\mathbf{0.1} \quad p_0 = 0, r_0 = g_z^k, d_0 = r_0, \delta_0 = r_0' r_0.$$

$$\mathbf{0.2} \quad \eta_2^k \leftarrow \max \{ \eta_0, \min \{ \eta_1, \|g_z^k\|_2^2 \} \}$$

$$\mathbf{0.3} \quad i = 0.$$

**1** Càlcul de la constant  $\alpha_i$  :

$$\mathbf{1.1} \quad v \xleftarrow[A4.19]{A4.17A4.18} Z^k d_i \quad \mathbf{1.5} \quad \text{Si } \gamma_1 \leq \sqrt{\epsilon_M} \delta_i \text{ aleshores}$$

$$\mathbf{1.2} \quad v \xleftarrow{A4.20} H_z^k v \quad p_z^k \leftarrow \begin{cases} -g_z^k & \text{si } i = 0 \\ p_i & \text{altrament} \end{cases}$$

$$\mathbf{1.3} \quad q_i \xleftarrow{A4.20} Z^{k'} v$$

**Fi del MNT.**

$$\mathbf{1.4} \quad \gamma_1 \leftarrow d_i' q_i \quad \mathbf{1.6} \quad \alpha_i \leftarrow \frac{r_i' r_i}{\gamma_1}.$$

**2** Actualització de la passa  $p_i$  i del residu  $r_i$ .

$$\mathbf{2.1} \quad p_{i+1} \leftarrow p_i + \alpha_i d_i \quad \mathbf{2.3} \quad \text{Si } \|r_{i+1}\|_2^2 < \eta_2^k \|g_z^k\|_2^2 \text{ llavors}$$

$$\mathbf{2.2} \quad r_{i+1} \leftarrow r_i + \alpha_i q_i \quad p_z^k \leftarrow p_{i+1}. \text{ **Fi del MNT.**}$$

**3** Actualització de la direcció  $d_i$  i la seva norma  $\delta_i$ .

$$\mathbf{3.1} \quad \beta_i \leftarrow \frac{r_{i+1}' r_{i+1}}{r_i' r_i} \quad \mathbf{3.5} \quad \text{Si } i > i_{max} \text{ llavors}$$

$$\mathbf{3.2} \quad d_{i+1} \leftarrow -r_{i+1} + \beta_i d_i \quad p_z^k \leftarrow p_i. \text{ **Fi del MNT.**}$$

$$\mathbf{3.3} \quad \delta_{i+1} \leftarrow r_{i+1}' r_{i+1} + \beta_i^2 \delta_i \quad \mathbf{3.6} \quad \text{Anada a } \mathbf{1}.$$

$$\mathbf{3.4} \quad i \leftarrow i + 1.$$

L'algorisme A5.3 presenta tres condicions d'acabament, a les passes  $\mathbf{1.5}$ ,  $\mathbf{2.3}$  i  $\mathbf{3.5}$  :

- 1.5** La condició  $\gamma_1 = d_i' H_z^k d_i \leq \sqrt{\epsilon_M} \delta_i$  representa una salvaguarda de l'estabilitat de l'algorisme contra Hessians reduïts no definitius positius. L'escalar  $\delta_i$ , que s'actualitza a cada iteració del GC, és  $\delta_i = d_i' d_i$ . Consideri's la direcció  $d_i$ . Si el producte  $d_i' H_z^k d_i$  és negatiu, llavors la direcció és de corbatura negativa i  $H_z^k$  no és definit positiu. Tenint en compte l'error numèric comés durant el càlcul computacional, i normalitzant la direcció  $d_i$  per tal de fer la comprovació independent de la seva norma, es considerarà que la direcció  $d_i$  no té una corbatura suficientment positiva si :

$$\frac{d_i'}{\|d_i\|_2} H_z^k \frac{d_i}{\|d_i\|_2} = \frac{1}{\|d_i\|_2^2} d_i' H_z^k d_i < \sqrt{\epsilon_M} \quad ; \quad d_i' H_z^k d_i < \sqrt{\epsilon_M} \|d_i\|_2^2$$



que coincideix amb el test de la passa **1.5**. Si la direcció  $d_i$  no té corbatura suficientment positiva, llavors es pren com a direcció de cerca  $p_z^k$  l'última direcció calculada  $p_i$ , que és de descens [24]. Si es detecta corbatura negativa a la primera iteració, es pren com a direcció de cerca la corresponent al mètode del gradient reduït  $p_z^k = -g_z^k$ , que és sempre de descens.

**2.3** Correspón al criteri d'acabament per reducció suficient del residu  $r_i$  :

$$\|r_i\|_2^2 = \|H_z^k p_i + g_z^k\|_2 < \eta_2^k \|g_z^k\|_2 = \eta_2^k \|r_0\|_2$$

L'expressió de l'escalar  $\eta_2^k$  a la passa **0.2** es basa en l'expressió (17) de [72]. L'expressió  $\min\{\eta_1, \|g_z^k\|_2^2\}$  proporciona un escalar autoadaptat a la proximitat del punt actual  $x^k$  a un entorn d'un mínim local  $x_M^*$  del problema (SNM). Si  $x^k$  està lluny de  $x_M^*$ , llavors  $\|g_z^k\|_2$  tindrà valors elevats i el mínim correspondrà a  $\eta_1$ , amb valors típics de  $\eta_1$  de entre 0.1 i 0.5. Si ens trobem en el cas contrari, és a dir,  $x^k \approx x_M^*$ , llavors és d'esperar que  $\|g_z^k\|_2 \approx 0$ , i el mínim correspondrà a  $\|g_z^k\|_2^2$ , que tindrà valors petits. Amb aquesta estratègia s'aconsegueix un algorisme que proporciona direccions de descens similars a les del mètode del gradient reduït quan es troba lluny de l'òptim, amb poc esforç computacional, i direccions properes a les de Newton quan el punt iterat es troba a prop de l'òptim  $x_M^*$ . L'escalar  $\eta_0$  representa la màxima reducció desitjada del residu  $r_i$ , i és una protecció contra resultats patològicament petits del criteri anterior, que podrien provocar una convergència anormalment lenta de l'algorisme.

**3.5** Aquest criteri de sortida és una salvaguarda contra un nombre excessiu d'iteracions per valors patològicament petits de l'escalar  $\eta_2^k$ .

Un punt pendent d'extrema importància és la resolució de la passa **1.2**, on cal fer el producte entre la matriu Hessiana al punt actual  $H(x^k)$  i el vector  $v = Z^k d_i$ . Donat que es considera que les segones derivades de la funció objectiu no estaran disponibles, cal disposar d'algun mètode de càlcul aproximat. Dembo i Steihaug [24] proposaren un mètode de diferències finites per aproximar el producte  $H(x^k)v$  a partir del desenvolupament en sèrie de Taylor del gradient :

$$g(x^k + \gamma v) \approx g(x^k) + \gamma H(x^k)v \quad ; \quad H(x^k)v \approx \frac{g(x^k + \gamma v) - g(x^k)}{\gamma} \quad (5.6)$$

El valor adoptat per a l'interval  $\gamma$  és  $\gamma = \sqrt{\epsilon_M}/\sqrt{\delta_i}$ , que equival a fer calcular per diferències finites el producte  $H(x^k)Z^k \hat{d}_i$  amb  $\hat{d}_i = d_i/\|d_i\|_2$  i interval  $\sqrt{\epsilon_M}$ .

### 5.2.2.2 Mètode quasi-Newton (MQN).

El càlcul de direccions de descens a (SNM) mitjançant el Mètode quasi-Newton (MQN) consisteix en la resolució de l'equació  $\tilde{H}_z p_z = -g_z$  prenent com a matriu  $\tilde{H}_z$  la factorització de Cholesky  $\tilde{H}_z = R'R$  de l'aproximació quasi-Newton de l'Hessiana reduït  $H_z(x)$  :

$$\tilde{H}_z = R'R \approx H_z(x) = Z'H(x)Z \quad (5.7)$$

Coneguts els factors de Cholesky [33]  $R$  de  $\tilde{H}_z$  es pot calcular  $p_z$  fàcilment per substitució directa i inversa. Aquests factors depenen de a) la definició del subproblema (SNM) o, el que és el mateix, de la matriu de projecció  $Z$  i b) del punt actual, que determina el valor de la matriu Hessiana  $H(x)$ . Qualsevol canvi en una d'aquestes dues matrius fa necessària una actualització dels factors  $R$ . Seguint el desenvolupament presentat a [59], es distingirà un conjunt de quatre casos d'actualització :

**AR1** : canvi del punt iterat (passa [3.4] de A3.1).

**AR2** : entrada d'una variable no bàsica al conjunt  $\mathcal{S}$  (passa [2.2] ).

**AR3** : eliminació d'una variable superbàsica de  $\mathcal{S}$  (passa [3.5] , cas  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}_S$ ).

**AR4** : canvi de base per pivotació (passa [3.5] , cas  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}_B$ ).

A continuació es descriuran aquests quatre casos d'actualització.

#### AR1: Actualització per canvi de punt actual.

La primera situació que provoca un canvi en l'Hessiana reduït consisteix en l'actualització de les variables a la passa [3.4] . En aquest cas es pot fer servir qualsevol de les fórmules habituals d'actualització quasi-Newton de l'aproximació de l'Hessiana reduït  $\tilde{H}_z$ . La fórmula que es proposa usar és la fórmula BFGS (Broyden [64], pàgs 102-104, Luenberger [55], secció 9.4) en la forma presentada per Murtagh i Saunders a [59] :

$$\tilde{H}_z^{k+1} = \tilde{H}_z^k + \frac{q^k q^{k'}}{\alpha^{*k} q^{k'} p_s^k} + \frac{g_z^k g_z^{k'}}{g_z^{k'} p_s^k} \quad (5.8)$$

on  $q^k = g_z^{k+1} - g_z^k$ . Aquesta expressió coincideix amb la fórmula BFGS habitual :

$$\tilde{H}_z^{k+1} = \tilde{H}_z^k + \frac{q^k q^{k'}}{q^{k'} p^k} - \frac{\tilde{H}_z^k p^k p^{k'} \tilde{H}_z^k}{p^{k'} \tilde{H}_z^k p^k} \quad (5.9)$$

on  $p^k = x_s^{k+1} - x_s^k = \alpha^{*k} p_s^k$ . Efectivament, si es desenvolupa (5.9) tenint en compte que  $\tilde{H}_z^k p^k = -\alpha^{*k} g_z^k$  s'obté :

$$\tilde{H}_z^{k+1} = \tilde{H}_z^k + \frac{q^k q^{k'}}{q^{k'} (\alpha^{*k} p_s^k)} - \frac{(-\alpha^{*k} g_z^k)(-\alpha^{*k} g_z^{k'})}{(\alpha^{*k} p_s^{k'})(-\alpha^{*k} g_z^k)} = \tilde{H}_z^k + \frac{q^k q^{k'}}{\alpha^{*k} q^{k'} p_s^k} + \frac{g_z^k g_z^{k'}}{p_s^{k'} g_z^k}$$

que coincideix amb (5.8) . Seguint [59], l'actualització (5.8) només s'aplica si la passa  $\alpha^{*k} p_s^k$  provoca una variació significativa del gradient reduït, monitoritzant aquesta variació a través del canvi de la derivada direccional  $g'_z p_s$ , de forma que només s'actualitza  $\tilde{H}_z^k$  si es satisfà :

$$g_z^{k+1'} p_s^k > 0.91 g_z^{k'} p_s^k \quad (5.10)$$

L'actualització BFGS expressada segons (5.8) implica l'addició de dues matrius de rang 1. Tanmateix, es pot demostrar ([12], apèndix 1), que, donada la fórmula (5.8) , el nou factor  $R^{k+1}$  es pot trobar mitjançant l'addició d'una única matriu de rang 1, amb la fórmula :

$$R^{k+1} = R^k + \bar{v} w' \quad (5.11)$$

on :

$$R^{k'} v = g_z^k \quad ; \quad \bar{v} = -\delta_1 v \quad ; \quad w = \delta_2 q^k + \delta_1 g_z^k$$

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_z^{k'} p_s^k}} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{*k} q^k}}$$

## AR2: Addició d'una variable superbàsica.

Siguin  $Z^k$  i  $R^k$  les matrius  $Z$  i  $R$  corresponents a la iteració  $k$ -èsima de A3.1. Consideri's que a la passa **2.2** s'ha afegit una nova variable superbàsica  $q$  al conjunt  $\mathcal{S}$ . Llavors  $\mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \cup \{q\}$  i la nova matriu  $Z$  és :

$$Z^{k+1} := [ Z^k \quad z ] \quad ; \quad z = \begin{bmatrix} -[B^{-1}]^k m_q \\ e_{s+1}^{s+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

on  $m_q$  és la columna de la matriu de constriccions  $M$  associada a la variable  $q$ . L'expressió de l'Hessia projectat sobre el nou subespai nul  $(\mathbf{SN}\bar{M})^{k+1}$  és :

$$H_z^{k+1} = Z^{k+1'} H(x^k) Z^{k+1} = \begin{bmatrix} Z^{k'} \\ z' \end{bmatrix} H(x^k) \begin{bmatrix} Z^k & z \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} Z^{k'} H(x^k) Z^k & Z^k H(x^k) z \\ \hline z' H(x^k) Z^k & z' H(x^k) z \end{array} \right] \quad (5.12)$$

La matriu particionada de (5.12) es pot obtenir fent el producte  $R^{k+1'} R^{k+1}$  amb uns factors de Cholesky  $R^{k+1}$  del tipus :

$$R^{k+1} = \left[ \begin{array}{c|c} R^k & r \\ \hline 0 & \rho \end{array} \right] \quad \text{amb} \quad \begin{cases} i) & z = \begin{bmatrix} -[B^{-1}]^k m_q \\ e_{s+1}^{s+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ ii) & v = H(x^k) z \\ iii) & R^{k'} r = Z^{k'} v \\ iv) & \rho = \sqrt{|z' v - \|r\|_2^2|} \end{cases} \quad (5.13)$$

Si  $\tilde{H}_z^k = R^{k'} R^k$  proporciona una bona aproximació de  $H_z^k$ , llavors  $\tilde{H}_z^{k+1} = R^{k+1'} R^{k+1}$  pot ser una aproximació vàlida de  $H_z^{k+1}$ . El càlcul de l'expressió de  $R^{k+1}$  donada a (5.13) es pot beneficiar dels algorismes especialitzats desenvolupats amb anterioritat. En concret :

- i) Pot ésser resolt aplicant A4.8 o A4.9 si  $y_q$  és un arc i A4.10 o A4.11 si és una folga.
- ii) Aquest producte entre l'Hessia i un vector és del mateix tipus que el realitzat a la passa **1.2** de l'algorisme del MNT. Es resol amb una aproximació per diferències finites com la indicada a (5.6) .
- iii) Donat  $R^k$  es calcula  $r$  per substitució inversa amb un vector de termes independents  $Z^{k'} v$  calculat amb l'algorisme A4.20.

El cost computacional del càlcul de  $R^{k+1}$  és el corresponent als algorismes usats a les passes *i*), *iii*), la resolució del sistema de la passa *iii*), que és d'ordre  $O(s^{k^2})$ , i l'avaluació a la passa *ii*) del gradient sobre el punt  $x^k + \gamma z$  durant l'aplicació de la fórmula (5.6) . L'aplicació de la fórmula d'actualització (5.13) , desenvolupada a [59], pot presentar certs problemes lligats fonamentalment al càlcul de  $\rho$  i a l'aproximació per diferències finites de la passa *ii*) (veure [59], pàgs 54 i 55). Per tal d'evitar-los, Murtagh i Saunders proposaren

una actualització alternativa, més senzilla, on el factor  $R^{k+1}$  adoptava l'expressió :

$$R^{k+1} = \left[ \begin{array}{c|c} R^k & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.14)$$

de fet, la darrera versió de la implementació computacional de l'algorisme presentat a [59] (MINOS 5.3) aplica sempre aquesta actualització simplificada. L'efecte de l'actualització (5.14) és provocar una passa del gradient reduït. Efectivament, tenint en compte que el punt  $x^k$  és punt estacionari de  $(\text{SNM})^k$  i, per tant,  $g_z^k \approx 0$ , la resolució de  $\tilde{H}_z^{k+1} p_z^{k+1} = -g_z^{k+1}$  queda :

$$\tilde{H}_z^{k+1} p_z^{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_z^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_z^{k+1} = - \begin{bmatrix} g_z^k \\ \sigma_q^k \end{bmatrix} \quad ; \quad p_z^{k+1} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_q^k \end{bmatrix}$$

que coincideix amb la passa del gradient reduït. Les primeres versions del codi NOXCB 9.0 incorporaven l'actualització (5.11) però va ser abandonada en favor de l'actualització (5.14) en base als resultats computacionals obtinguts.

### AR3: Eliminació d'una variable superbàsica de $\mathcal{S}$ .

Sigui  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{(s^k-1)}$  el factor associat a  $\tilde{H}_z^{k+1}$  després d'una actualització de  $\mathcal{S}$  del tipus  $\mathcal{S}^{k+1} := \mathcal{S}^k \setminus \{s_l\}$ . Llavors  $\tilde{R}$  és una matriu de Hessenberg superior<sup>5</sup>, amb orlat a partir de la columna  $l$ -èsima, doncs  $\tilde{R}$  prové de  $R^k \in \mathbb{R}^{s^k}$  per eliminació de la columna  $l$ -èsima. Per tal de recuperar l'estructura triangular superior de  $\tilde{R}$  es realitza un conjunt de  $s^k - l$  productes per matrius de rotació de Givens<sup>6</sup>  $G_{j,j+1}$ ,  $j = l, s^k - 1$  :

$$R^{k+1} = G_{s^k-1,s^k} \dots G_{l,l+1} \tilde{R} \quad (5.15)$$

aconseguint un factor  $R^{k+1}$  triangular superior. El producte per matrius de Givens no altera la factorització  $\tilde{H}_z^{k+1} = \tilde{R}' \tilde{R}$  doncs, tenint en compte que les matrius de Givens són ortogonals es té que :

$$R^{k+1'} R^{k+1} = \tilde{R}' G'_{l,l-1} \dots G'_{s^k-1,s^k} G_{s^k-1,s^k} \dots G_{l,l-1} \tilde{R} = \tilde{R}' \mathbf{I} \tilde{R} = \tilde{R}' \tilde{R}$$

---

<sup>5</sup> [36], secció 1.3

<sup>6</sup> [36], secció 3.4.

**AR4: Actualització per canvi de base.**

Si a la iteració  $k$ -èssima de A3.1 esdevé que  $\alpha^{*k} = \bar{\alpha}_B^k$  llavors l'algorisme efectua una pivotació entre la variable bàsica associada a  $\bar{\alpha}_B^k$ , que indicarem per  $x_{Bp}$ , i una certa variable superbàsica  $x_{Sq}$ . Aquesta pivotació provoca el pas de  $x_{Sq}$  de  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{B}$  i el de  $x_{Bp}$  de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{N}$ . A efectes de l'estudi de l'actualització de  $R^k$  es considerarà que l'intercanvi de variables entre els conjunts  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{N}$  s'efectua en dues etapes. Primer, considerarem que les variables  $x_{Bp}$  i  $x_{Sq}$  intercanvien les seves posicions, quedant  $x_{Bp}$  com a variable superbàsica. En la segona etapa,  $x_{Bp}$  serà eliminada de  $\mathcal{S}$ . L'actualització de  $R^k$  en aquesta segona etapa coincideix amb el cas AR3 ja estudiat. L'expressió de la matriu  $Z$  després de la pivotació entre  $x_{Bp}$  i  $x_{Sq}$  és :

$$Z^{k+1} = P_{p,m+q} Z^k (\mathbf{I} + e_q^s v') \quad (5.16a)$$

$$v = -\frac{1}{y_{pq}} (y^{p'} + e_q^s) \quad (5.16b)$$

on  $y^p$  és el vector fila corresponent a la fila  $p$ -èssima de la matriu  $Y = [B^{-1}]^k S^k$ ,  $y_{pq}$  és l'element  $q$ -èssim de  $y^p$ , i  $P_{p,m+q}$  és una matriu elemental de permutació que realitza l'intercanvi de les files de  $Z$  associades a  $x_{Bp}$  (fila  $p$ ) i  $x_{Sq}$  (fila  $m+q$ ). L'intercanvi  $x_{Bp} \leftrightarrow x_{Sq}$  provoca una reordenació de les files i columnes de la matriu Hessiana  $H^k$  que pot ser expressada mitjançant les matrius de permutació  $P_{p,m+q}$  com :

$$H^{k+1} = P_{p,m+q} H^k P'_{p,m+q}$$

L'expressió del nou Hessià projectat  $H_z^{k+1}$  és :

$$\begin{aligned} H_z^{k+1} &= Z^{k+1'} H^{k+1} Z^{k+1} = (\mathbf{I} + v e_q^{s'}) Z^{k'} P'_{p,m+q} P_{p,m+q} H^k P'_{p,m+q} P_{p,m+q} Z^k (\mathbf{I} + e_q^s v') \\ &= (\mathbf{I} + v e_q^{s'}) Z^{k'} H^k Z^k (\mathbf{I} + e_q^s v') = (\mathbf{I} + v e_q^{s'}) H_z^k (\mathbf{I} + e_q^s v') \end{aligned} \quad (5.17)$$

on s'ha tingut en compte que les matrius de permutació són ortogonals. D'acord amb (5.17), la factorització de l'aproximació a  $H_z^{k+1}$  s'actualitzarà segons :

$$\begin{aligned} R^{k+1'} R^{k+1} &= (\mathbf{I} + v e_q^{s'}) R^{k'} R^k (\mathbf{I} + e_q^s v') = (R^{k'} + v r'_q) (R^k + r_q v') \\ &\Downarrow \\ R^{k+1} &= R^k + r_q v' \end{aligned} \quad (5.18)$$

on  $r_q$  és la  $q$ -èssima columna de  $R^k$ .

El procés de càlcul del vector  $v$  descrit a (5.16b) té una especial rellevància, doncs hi ha implicades certes quantitats que són d'utilitat fora de l'actualització de  $R^k$ . El procés de càlcul de  $v = -\frac{1}{y_{pq}}(y^{p'} + e_q^s)$  es desglossa en tres passes :

i) Càlcul del vector fila  $\beta^p = e_p^{m'}[B^{-1}]^k$ , la fila  $p$ -èsima de la base actual. Aquesta operació es pot du a terme explotant l'estructura de xarxa del problema a través dels algorismes A4.14 i A4.15, si  $x_{\mathcal{B}p}$  és un arc clau, i de l'algorisme A4.16 si és un arc no clau o una folga bàsica.

ii) Càlcul del vector d'elements pivotals  $y^p = \beta^p S^k$ . Tenint en compte l'estructura de la matriu superbàsica aquest producte es pot descomposar en :

$$y^p = \beta_A^p A_S^k + \beta_T^p T_S^k$$

on, en el primer producte, es pot explotar l'estructura de xarxa.

iii) Finalment, càlcul de  $v = -(1/y_{pq})(y^{p'} + e_q^s)$ .

Els vectors  $\beta^p$ ,  $y^p$  i  $v$  estan implicats en les fórmules d'actualització per pivotació de l'estimació dels multiplicadors de Lagrange associats a les constriccions de xarxa  $\pi_A^k$  i a banda  $\pi_T^k$  i del gradient reduït  $g_z^k$ , que corresponen a les expressions :

$$[\pi_A^{k+1'} \mid \pi_T^{k+1'}] = [\pi_A^k \mid \pi_T^k] + \frac{g_{zq}^k}{y_{pq}} [\beta_A^p \mid \beta_T^p] \quad (5.19a)$$

$$g_z^{k+1} = g_z^k + g_{zq}^k v \quad (5.19b)$$

La fórmula d'actualització dels multiplicadors  $\pi^k$  és la mateixa fórmula d'actualització usada habitualment a l'algorisme del símplex dual, substituint el cost reduït de la variable no bàsica entrant per la component del gradient reduït corresponent a la variable superbàsica que entra a la base. Una demostració de (5.19a) pot trobar-se a [19], pàg. 441. La fórmula (5.19b) es dedueix fàcilment. Consideri's el vector gradient a la iteració actual  $g^k = g(x^k)$  ordenat segons la partició en variables bàsiques, superbàsiques i no bàsiques. L'intercanvi de les variables  $x_{\mathcal{B}p}$  i  $x_{\mathcal{S}q}$  provoca un intercanvi de les components  $p$  i  $(m+q)$  de  $g^k$ , de forma que el nou vector gradient serà  $g^{k+1} = P_{p,m+q}g^k$ . Si es desenvolupa l'expressió

del gradient reduït  $g_z^{k+1}$  considerant la fórmula d'actualització de  $Z^k$  donada per (5.16b) s'obté :

$$\begin{aligned} g_z^{k+1} &= Z^{k+1'} g^{k+1} = [P_{p,m+q} Z^k (\mathbf{I} + e_q^s v')] P_{p,m+q} g^k \\ &= (\mathbf{I} + e_q^s v')' Z^{k'} P_{p,m+q}' P_{p,m+q} g^k \\ &= (\mathbf{I} + v e_q^{s'}) Z^{k'} g^k = g_z^k + g_{zq}^k v \end{aligned}$$

que coincideix amb (5.19b) .

Finalment, el vector  $y^p$  pot ésser usat en el procés de selecció de la variable superbàsica a pivotar amb  $x_{Bp}$ , doncs les components d'aquest vector són els elements pivotals associats a cadascuna de les variables superbàsiques. El criteri adoptat és el proposat a [59], consistent en seleccionar l'índex  $q$  definit per :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \max_{j=1,s} \{ | y_{pj} | \} \\ d_j &= \min \{ | x_{sj} | , | u_{sj} - x_{sj} | \} , j = 1, \dots, s \\ d_q &= \max_{j=1,s} \{ d_j \text{ tq } | y_{pj} | \geq \eta_4 \bar{y} \} \end{aligned} \quad (5.20)$$

on l'escalar  $\eta_4 \in ]0,1[$  té a NOXCB 9.0 un valor per defecte de 0.1 i és modificable per l'usuari. El criteri (5.20) intenta seleccionar la variable superbàsica menys degenerada de entre les que tenen un element pivotal prou gran.

### 5.2.2.3 Comparació MNT i MQN.

Els dos mètodes de càlcul de direccions factibles de descens descrits a les seccions precedents exhibeixen característiques diferents. Les diferències més destacables són :

- i) *Requeriments de memòria* : a banda dels vectors auxiliars necessaris en tots dos mètodes, el MQN necessita emmagatzemar els  $s(s-1)/2$  elements el factor triangular  $R$ , que és dens.
- ii) *Cost computacional* : El cost computacional del MNT rau fonamentalment en el càlcul de la constant  $\alpha_i$  pel qual es necessiten, a cada iteració del GC, un producte  $Zv$ , un producte  $Z'v$  i una avaluació del vector gradient. El MQN necessita resoldre el sistema  $R'Rp_z = -g_z$  per substitució directa i inversa ( $O(s^2)$ ) i efectuar les addicions de matrius de rang 1 de les actualitzacions AR1 i AR4 i els productes per matrius de rotació de Givens del cas AR3.



L'eficiència relativa dels dos mètodes depèn completament de les característiques del model resolt. D'entrada, en models amb un alt nombre de variables superbàsiques a l'òptim, els requeriments de memòria del MQN seran prohibitius en la major part de plataformes computacionals. Durant les proves computacionals realitzades s'han resolt models que arriben a tenir prop de 3000 variables superbàsiques a l'òptim. Si es treballa en doble precisió, l'ús del MQN necessitaria disposar en aquests models de més de 35Mb de memòria només pels elements de  $R$ , mentre que el MNT no té cap necessitat remarcable de memòria addicional. En models on el càlcul del vector gradient és costós el MNT surt penalitzat degut a les  $i_{GC}$  avaluacions addicionals necessàries pel càlcul de  $\alpha_i$ , on  $i_{GC}$  és el nombre total d'iteracions del GC al llarg d'una execució de l'algorisme A3.1. Aquest nombre d'avaluacions addicionals es pot intentar reduir incrementant els escalars  $\eta_0$  i  $\eta_1$  a l'algorisme A5.3. D'aquesta forma, en incrementar el valor de  $\eta_2^k$ , es relaxa la condició de sortida de la passa **2.3**, reduint així el nombre d'iteracions. La contrapartida és un empitjorament de la convergència del mètode, que depèn precisament de la successió  $\{\eta_2^k\}$  (Teorema 2.3, [24]). Per altra banda, el cost de resolució del sistema  $R'Rp_z = -g_z$  del MQN és dominant a partir d'un nombre moderat de variables superbàsiques. Per exemple, en un model amb 1524 arcs, 360 nusos, 4 constriccions a banda i 705 variables superbàsiques a l'òptim s'ha observat que més del 60% del temps de càlcul es dedica a la resolució del sistema  $R'Rp_z = -g_z$ . L'estratègia que es proposa és usar el MQN sempre que el nombre de variables superbàsiques estigui per sota d'un cert valor màxim  $\bar{s}$ , per sobre del qual s'usarà el MNT. A la implementació NOXCB 9.0 el valor per defecte és  $\bar{s} = 500$ , sent  $\bar{s}$  un paràmetre modificable per l'usuari. Si, després d'haver-se superat  $\bar{s}$ , el nombre de superbàsiques torna a estar per sota (cas poc corrent), es torna a aplicar MQN amb  $\tilde{H}_z := \mathbf{I}$ .

### 5.2.3 Identificació d'òptims de $(\mathbf{SN}\bar{M})$ .

El procés d'optimització al subespai nul acaba, teòricament, a la passa **1** de l'algorisme A3.1 amb la identificació de  $x_{\bar{M}}^*$ , punt estacionari de  $(\mathbf{SN}\bar{M})$ , per bé que, en general, només s'obtindrà una certa aproximació de  $x_{\bar{M}}^*$ . Això és degut, d'una banda, a la impossibilitat de determinar el valor numèric de les components de la solució  $x_{\bar{M}}^*$  més enllà d'un cert nombre de xifres significatives degut als errors inherents al treball amb aritmètica finita i, d'altra banda, al fet que només convé estimar amb molta precisió el

valor de  $x_M^*$  quan el conjunt de constriccions actives actual és l'òptim. El tractament d'aquest dos fets, que implica l'establiment d'un conjunt de regles heurístiques, s'ha mostrat decisiu en l'obtenció d'un codi robust que permeti la resolució de problemes de gran escala.

Suposem que, acabada la  $k$ -èssima iteració del subproblema a l'espai nul ( $\text{SN}\bar{M}$ ), volem decidir si la solució actual  $x^k$  és una aproximació acceptable de  $x_M^*$ . S'introdueix la variable lògica  $T^k$ , el valor de la qual ens indicarà si l'aproximació és acceptable ( $T^k = \text{true}$ ) o si s'ha de millorar ( $T^k = \text{false}$ ). Per tal de determinar el valor de  $T^k$  es defineixen les següents variables lògiques :

$$\left. \begin{aligned} T_1^k &:= |f(x^{k-1}) - f(x^k)| < (\tau_F^k + \epsilon_M)(1 + |f(x^k)|) \\ T_2^k &:= \alpha^{*k} \|p_s^k\|_\infty < (\tau_X^k + \sqrt{\epsilon_M})(1 + \|x_s^k\|_\infty) \\ T_3^k &:= \|g_z^k\|_\infty < \epsilon_G^k \\ T_4^k &:= \|g_z^k\|_\infty < \max\{0.1\epsilon_G^k, \mu_{G2} \theta(\pi^k)\} \\ T_5^k &:= (\textit{itersen}^k \geq \textit{itersen}_{\max}) \quad .and. \quad \|g_z^k\|_1 < 10. \theta(\pi^k) \\ T_6^k &:= (T_1^{k-1} .and. T_2^{k-1}) .and. (T_1^{k-2} .and. T_2^{k-2}) .and. (T_1^{k-3} .and. T_2^{k-3}) \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

La interpretació d'aquest conjunt de tests és :

$T_1^k$  : comprova si la variació del valor de la funció objectiu a l'última iteració està per sota d'un cert escalar  $\epsilon_F^k$  relacionat amb la *precisió estimada de f a  $x^k$*  ([33], pàg. 331). Aquesta precisió estimada es defineix com l'escalar  $\epsilon_F$  tal que :

$$| \text{fl}(f(\bar{x}^k)) - f(x^k) | \leq \epsilon_F$$

$\bar{x}^k$  és la representació digital del punt  $x^k$  i  $\text{fl}(f(\bar{x}^k))$  és el valor de  $f(\bar{x}^k)$  proporcionat per la rutina de càlcul de la funció objectiu, de forma que  $\epsilon_F$  representa la mínima variació significativa de  $f(x^k)$ . Conèixer el valor de  $\epsilon_F$  amb exactitud és difícil, i requereix, en general, avaluacions addicionals de la funció objectiu o de les derivades ([33], (8.29) i (8.30)). L'aproximació de  $\epsilon_F$  adoptada pel test  $T_1^k$  és :

$$\epsilon_F \approx \epsilon_F^k = (\tau_F^k + \epsilon_M)(1 + |f(x^k)|) \quad (5.22)$$

on  $\epsilon_M$  és la precisió de la màquina i  $\tau_F^k$  vé donat per :

$$\tau_F^k = \begin{cases} \tau_X^k/10 & \text{si } tol^k = 1 \\ (\tau_X^k)^2 & \text{si } tol^k = 2 \end{cases} \quad (5.23)$$

El paràmetre  $tol^k$  indica si  $x^k$  es troba lluny ( $tol^k = 1$ ) o prop ( $tol^k = 2$ ) de l'òptim de (FNCL) . L'escalar  $\tau_X^k$  està relacionat amb el test  $T_2^k$  i s'explicarà posteriorment. Noti's que, segons (5.22) , es satisfà  $\epsilon_F^k > \epsilon_F^* = \epsilon_M(1 + |f(x^k)|)$ , sent  $\epsilon_F^*$  la fita inferior estàndard de  $\epsilon_F$  tal com es defineix a [33], secció 8.5.1.3.

$T_2^k$  : comprova si la variació del vector de variables superbàsiques és significativa, considerant com a significativa tota pertorbació amb norma  $l_\infty$  per sobre de  $\epsilon_X^k$  :

$$\epsilon_X^k = (\tau_X^k + \sqrt{\epsilon_M}) (1 + \|x_s^k\|_\infty)$$

L'escalar  $\epsilon_X^k$  està relacionat amb la *mínima pertorbació significativa de  $x^k$* , definida com l'escalar  $\epsilon_X \approx \|\bar{x}^k - x^k\|_2$  ([33], pàg. 302), és a dir, la norma  $l_2$  de la pertorbació de  $x^k$  que provoca una variació de la funció objectiu de valor  $\epsilon_F$ . El valor de  $\tau_X^k$  depén de la proximitat de  $x^k$  a l'òptim de (FNCL) , proximitat que ve indicada pel valor de  $tol^k$  :

$$\tau_X^k = \begin{cases} 0.1 & \text{si } tol^k = 1 \\ \max\{10^{-6}, \sqrt{\epsilon_M}\} & \text{si } tol^k = 2 \end{cases}$$

Per problemes ben escalats s'acostuma a acceptar la relació  $\epsilon_X = O(\sqrt{\epsilon_F})$ , d'on prové l'expressió  $\tau_F^k = (\tau_X^k)^2$  a (5.23) .

$T_3^k$  : és la versió computacional de la condició necessaria de primer ordre de mínim  $\|g_z^k\|_2 = 0$ . L'expressió de l'escalar  $\epsilon_G^k$  és, en general,  $\epsilon_G^k = \mu_{G1} \|g_z^{k0}\|_\infty$  sent  $g_z^{k0}$  el gradient reduït a la iteració  $k0$ , la iteració inicial del procés d'optimització del subproblema (SNM) actual, tot i que el seu valor pot ser modificat per l'algorisme d'identificació d'òptims del problema (FNCL) segons el procediment que es descriurà més endavant. L'escalar  $\mu_{G1} \in ]0, 1[$  representa la mínima reducció volguda de la norma del gradient reduït. A NOXCB 9.0 té un valor per defecte de 0.5 i és modificable per l'usuari.

$T_4^k$  : Representa un test de la condició  $\|g_z(x_M^*)\|_2 = 0$  més estricte que el  $T_3^k$ .  $\mu_{G_2}$  es calcula com  $\mu_{G_2} = \max\{10^{-7}, \sqrt{\epsilon_M}, \epsilon_o\}$ , on  $\epsilon_o$  és la precisió a l'òptim volguda per l'usuari ( $10^{-6}$  per defecte). La funció  $\theta(\pi^k)$  es defineix com :

$$\theta(\pi^k) = \max\{1, \|\pi^k\|_1 / (\sqrt{m+t})\} \quad (5.24)$$

representant una mesura de la norma dels multiplicadors  $\pi^k$  escalada segons el nombre de constriccions del problema. Aquesta és la mateixa funció adoptada per MINOS 5.3, i serà usada també durant la comprovació de les condicions d'optimalitat del problema (FNCL) .

$T_5^k$  : *itersen*<sup>k</sup> indica el nombre de iteracions efectuades sobre el subespai nul actual, i *itersen*<sub>max</sub> és el màxim permés. Aquest test representa una salvaguarda contra una convergència anormalment lenta en la resolució de (SNM)<sup>k</sup>. Per tal d'evitar, però, un error massa elevat en l'estimació dels multiplicadors de Lagrange  $\pi^k$  y  $\sigma_N^k$ , aquesta sortida d'emergència només s'activarà si  $\|g_z^k\|_1 < 10 \cdot \theta(\pi^k)$ .

$T_6^k$  : Aquest criteri intenta detectar un fenomen observat durant la realització de les proves computacionals. Aquest fenomen consistia en la realització d'un gran nombre de passes amb un progrés molt petit tant en la variació de la funció objectiu com en el canvi de les variables, sense que la norma del gradient reduït minvés per sota de  $\epsilon_G^k$ . Aquesta situació, que es produïa usualment quan  $\|g_z^{k_0}\|_2$  era molt petita, podia arribar a fer perdre la convergència de la resolució del subproblema (SNM)<sup>k</sup>.

La necessitat d'establir uns criteris d'aturada similars a  $T_1^k$ ,  $T_2^k$  i  $T_3^k$  es discuteix ampliament a la secció 8.2.3 de [33]. La forma particular que adopten els tests  $T_1^k$  a  $T_2^k$  provenen de [59], secció 3.4, i són els mateixos que implementa MINOS 5.3. Els criteris  $T_5^k$  i  $T_6^k$  s'han introduït per evitar certs problemes de convergència observats en alguns dels models resolts. Un cop avaluades les variables lògiques  $T_1^k$  a  $T_6^k$  es determina la variable lògica  $T^k$  com :

$$T^k = (T_1^k \text{ .and. } T_3^k) \text{ .or. } (T_2^k \text{ .and. } T_3^k) \text{ .or. } T_4^k \text{ .or. } T_5^k \text{ .or. } T_6^k \quad (5.25)$$

Aquesta és la fórmula que implementa actualment el paquet NOXCB 9.0, i representa una relaxació de la fórmula  $T^k = (T_1^k \text{ .and. } T_2^k \text{ .and. } T_3^k) \text{ .or. } T_4^k$  proposada per Murtagh i Saunders a [59]. La fórmula proposada a [59], amb l'addició dels tests  $T_5^k$  i  $T_6^k$  també

s'ha provat obtenint-se resultats similars als obtinguts amb (5.25) . Si el resultat de (5.25) és  $T^k = true$ , llavors  $x^k \approx x_M^{*k}$  i es procedeix a la taxació de les variables no bàsiques, mentre que si  $T^k = false$  es continua el procés d'optimització de  $(\mathbf{SNM})^k$ .

### 5.3 Identificació d'òptims de (FNCL).

Consideri's un punt  $x^k$  que satisfà el criteri (5.25), és a dir, és considerat com una aproximació raonable de  $x_M^{*k}$ . Siguin  $\pi^k$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}^k$  l'estimació dels multiplicadors  $\pi^*$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}^*$  sobre  $x^k$  calculats segons les equacions (3.13a) i (3.13b). Llavors  $\pi^k$  i  $\sigma_{\mathcal{N}}^k$  satisfaran la primera condició de KKT (3.12a) amb un residu màxim igual a  $\|g_z^k\|_\infty$ , suposadament petit segons assegurin  $T_3^k$  i  $T_4^k$ . Per tal de comprovar si  $x^k$  representa una estimació acceptable de l'òptim de  $(\mathbf{FNCL})$ , cal comprovar que els signes de les components de  $\sigma_{\mathcal{N}}^k$  estiguin d'acord amb els que marca la segona condició de KKT (equacions (3.12b) i (3.12c)). Aquesta comprovació s'efectua a la passa **2** de A3.1. Dins d'aquesta secció es descriurà el detall de la implementació d'aquesta comprovació.

#### 5.3.1 Taxació.

El procés de taxació consisteix en la selecció d'una component del vector  $\sigma_{\mathcal{N}}$  que violi una qualsevol de les condicions (3.12b) o (3.12c), és a dir, la selecció d'un índex  $q \in \mathcal{N}^k$  que satisfaci :

$$\sigma_q^k < 0 \text{ si } q \in \mathcal{N}_0^k \quad ; \quad \sigma_q^k > 0 \text{ si } q \in \mathcal{N}_u^k \quad (5.26)$$

on, recordem,  $q \in \mathcal{N}_0^k$  indica  $x_q^k = 0$  i  $q \in \mathcal{N}_u^k$  indica  $x_q^k = u_q$ . La idea general del procés de taxació consisteix en intentar obtenir una variable  $q$  que compleixi la condició (5.26) i que tingui un multiplicador  $\sigma_q^k$  "prou gran", per exemple, amb valor absolut per sobre d'un cert escalar positiu  $\epsilon_\sigma^k$ , és a dir :

$$\sigma_q^k < -\epsilon_\sigma^k \text{ si } q \in \mathcal{N}_0^k \quad ; \quad \sigma_q^k > \epsilon_\sigma^k \text{ si } q \in \mathcal{N}_u^k \quad (5.27)$$

L'estratègia aplicada consisteix en taxar primer les folgues no bàsiques per intentar obtenir el conjunt de folgues òptim rapidament. Si no es troba cap folga no bàsica que satisfaci (5.27), es taxen els arcs no bàsics en grups de  $n_{tax}$  a partir de l'arc  $q_0$ , intentant trobar un

que satisfaci (5.27). Durant aquests dos processos es calculen també els multiplicadors  $\sigma_i^k$  de valor absolut màxim que satisfan (5.26). La forma com s'ha dut a terme aquest procés s'indica en el següent algorisme :

**Algorisme A5.4 :** Taxació.

**0 Inicialització.**

Donats els paràmetres :  $\epsilon_\sigma^k > 0, n_{tax}, q_0 \in \mathbb{Z}^+$

S'inicialitzen :  $\tilde{q} = 0$  ,  $\bar{q} = 0$ .

**1 Taxació de les folgues no bàsiques.**

**1.1** Es calcula  $\sigma_{\mathcal{N}_z}^k$  segons la passa **2** de A4.21

**1.2** Es defineix la llista  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z}$  i  $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z}$  :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z} = \left\{ i \in \mathcal{N}_z^k : \text{satisfà (5.27)} \right\} ; \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z} = \left\{ i \in \mathcal{N}_z^k : \text{satisfà (5.26)} \right\}$$

**1.3** Si  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z} \neq \emptyset$  llavors :

$$\text{S'assigna } \tilde{q} \leftarrow q \text{ tq } |\sigma_q^k| = \max\{|\sigma_i^k| : i \in \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z}\}$$

**Fi de la taxació**, amb folga  $\tilde{q}$  candidata a esdevenir superbàsica.

altrament

$$\bar{\sigma}_{\mathcal{N}_z} \leftarrow \max\{|\sigma_i^k| : i \in \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_z}\}$$

Anada a **2**.

**2 Taxació arcs no bàsics.**

**2.4** Es defineix la partició  $\mathcal{N}_x^k = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{N}_j$  en grups de  $n_{tax}$  índexos a partir de  $q_0$ .

**2.5** Per a  $j = 1, \dots, n$  fer

Es calcula  $\sigma_i^k, i \in \mathcal{N}_j$  segons la passa **1** de A4.21

$$[\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j = \{i \in \mathcal{N}_j : \text{satisfà (5.27)}\} ; [\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j = \{i \in \mathcal{N}_j : \text{satisfà (5.26)}\}$$

Si  $[\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j \neq \emptyset$  anada a **2.6**

**2.6** Si  $[\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j = \emptyset, j = 1, \dots, n$  llavors

$$\bar{\sigma}_{\mathcal{N}_x} \leftarrow \max\{|\sigma_i^k| : i \in \bigcup_{j=1}^n [\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j\}$$

Anada a **3**.

altrament

$$\text{S'assigna } \tilde{q} \leftarrow q \text{ tq } |\sigma_q^k| = \max\{|\sigma_i^k| : i \in [\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j\}$$

**Fi de la taxació**, amb arc  $\tilde{q}$  candidat a esdevenir superbàsic.

**3 No s'ha trobat cap candidata a ser relaxada.**

$$\bar{\sigma}_{\mathcal{N}} \leftarrow \max\{\bar{\sigma}_{\mathcal{N}_z}, \bar{\sigma}_{\mathcal{N}_x}\} ; \bar{q} \leftarrow q \text{ tq } |\sigma_q^k| = \bar{\sigma}.$$

**Fi de la taxació** sense cap candidat a esdevenir superbàsic.

L'acabament de l'algorisme A5.4 pot correspondre a un dels següents dos casos :

Cas a) :  $\tilde{q} \neq 0$  S'ha trobat una variable no bàsica  $\tilde{q}$  que satisfà (5.27). En aquest cas s'efectuarà el pas de  $\tilde{q}$  de  $\mathcal{N}^k$  a  $\mathcal{S}^k$  i les actualitzacions que aquest canvi provoca (AC1, AR2).

Cas b) :  $\tilde{q} = 0$  No existeix cap variable no bàsica que satisfaci (5.27). En aquest cas l'algorisme proporciona  $\bar{\sigma}_{\mathcal{N}}$  el màxim valor absolut dels multiplicadors de les variables que satisfan (5.26), i l'índex  $\bar{q}$  de la variable associada.

El valor de  $n_{tax}$  pot ser fixat per l'usuari, i es calcula per defecte segons l'expressió  $n_{tax} = \max\{10, \lfloor \tilde{n} - m \rfloor / 10\}$ . L'índex de l'arc no bàsic  $q_0$  a partir del qual es comencen a definir els conjunts  $\mathcal{N}_j$  a la iteració  $k$  és l'últim arc taxat al darrer procés de taxació. El valor de l'escalar  $\epsilon_{\sigma}^k$  s'inicialitza amb un valor arbitrari elevat (per exemple,  $\epsilon_{\sigma}^0 = 100$ .) i s'actualitza al llarg de l'optimització segons es descriurà a l'algorisme d'identificació d'òptims de (FNCL) .

### 5.3.2 Bloquejos.

Es parla de bloqueig quan, durant la primera iteració del procés d'optimització de  $(\text{SN}\bar{M})^k$  després d'haver entrat l'arc no bàsic  $\tilde{q}$  a  $\mathcal{S}$ , s'obté com a passa màxima  $\bar{\alpha}^k = 0$ . Aquesta situació ha estat descrita per problemes de fluxos en xarxes purs ([72], pàg 33), i correspon a la situació en que qualsevol moviment factible de la variable  $x_{\tilde{q}}$  provoca una violació del flux d'un dels arcs claus que pertanyen al seu cicle bàsic. Consideri's que l'arc  $\tilde{q} \in \mathcal{N}_x$  és seleccionat per entrar a  $\mathcal{S}_x$ . L'arc  $x_{\tilde{q}}$  estarà potencialment bloquejat si es satisfà :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{q} \in \mathcal{N}_u \quad \text{i} \quad \exists p \in \overset{\circ}{\tilde{q}}^+ \text{ tq } x_p = u_p \quad \text{ó} \quad \exists p \in \overset{\circ}{\tilde{q}}^- \text{ tq } x_p = 0 \\ \tilde{q} \in \mathcal{N}_0 \quad \text{i} \quad \exists p \in \overset{\circ}{\tilde{q}}^+ \text{ tq } x_p = 0 \quad \text{ó} \quad \exists p \in \overset{\circ}{\tilde{q}}^- \text{ tq } x_p = u_p \end{array} \right\} \quad (5.28)$$

Aquest és l'únic cas de bloqueig que cal considerar en problemes purs de fluxos en xarxes. En presència de constriccions a banda la situació es complica notablement, doncs l'expressió

de la passa bàsica  $p_B = [p'_A \quad | \quad p'_c]$ , és, segons (4.31) :

$$p_c = Q^{-1} (T_A \Theta_s p_{s_x} - T_s p_{s_x} - \mathbf{I}_s p_{s_z})$$

$$p_A = - \Theta_s p_{s_x} - \Theta_c p_{c_x}$$

Aquest fet provoca l'aparició de nous casos de bloqueig potencial provocats per variables  $\mathcal{C}$  a fita i per situacions com les descrites a (5.28) però ara provocades per arcs  $l \in \mathcal{C}_x$  i arcs clau  $p \in \mathring{l}$ . El codi implementat no controla aquests nous casos de bloqueig, controlant, així si, el cas tradicional de bloqueig descrit per (5.28). Aquest control depén del valor de la variable lògica *bloq*, amb valor per defecte  $bloq = false$  i modificable per l'usuari. Si s'activa el control de bloqueig llavors, durant la confecció de les llistes de candidats  $[\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{N}_x}]_j$  de la passa **2.5** de A5.4 es descarten els arcs potencialment bloquejats segons els criteris (5.28). L'ús d'aquest control de bloqueig, en conjunció amb la definició de conjunts  $\mathcal{N}_j$  de dimensió reduïda ha demostrat ser una via adequada de tractament de problemes amb graus alts de degeneració.

### 5.3.3 Procés d'identificació d'òptims de (FNCL) .

El mètode d'identificació d'òptims implementat és un procés heurístic que coordina l'actuació dels tests (5.21) i (5.25) d'identificació d'òptims al subespai nul i l'algorisme de taxació descrit a la secció 5.3.1. Aquesta coordinació es duu a terme mitjançant un cert mecanisme d'actualització dels paràmetres  $tol^k$ ,  $\epsilon_G^k$  i  $\epsilon_\sigma^k$ . L'objectiu d'aquest mètode és :

- i) Ajustar la precisió amb que s'executen els processos d'optimització del subproblema (SNM) i de taxació quan l'iterat actual  $x^k$  s'aproximi a l'òptim de (FNCL)  $x^*$ .
- ii) Proporcionar com a solució  $x^*$  un punt iterat on les dues condicions de KKT siguin satisfetes fins a una *precisió d'òptim*  $\epsilon_o$ . En aquest sentit, es dirà que l'iterat  $x^k$  és l'òptim del problema (FNCL) dins de la precisió  $\epsilon_o$  si es satisfà :

$$\sigma_i^k > -\epsilon_o \theta(\pi^k) \quad , \quad i \in \mathcal{N}_0^k \tag{5.29a}$$

$$\sigma_i^k < \epsilon_o \theta(\pi^k) \quad , \quad i \in \mathcal{N}_u^k \tag{5.29b}$$

$$|g_{z_i}^k| < \epsilon_o \theta(\pi^k) \quad , \quad i = 1, \dots, s^k \tag{5.29c}$$



on  $\theta(\pi^k)$  ha estat definida a (5.24).

Les següents definicions introdueixen el concepte de *pseudo-òptims* :

**Definició 5.1 Pseudo-òptim de classe 1 :** Un iterat  $x^k$  es dirà que és un *pseudo-òptim de classe 1* (PSO1) si el resultat de la taxació feta mitjançant l'algorisme A5.4 és :

- i)  $\tilde{q} = 0$
- ii)  $\bar{\sigma} > \epsilon_o \theta(\pi^k)$

és a dir,  $x^k$  viola (5.27) ( $\bar{\sigma} < \epsilon_\sigma^k$ ) i viola (5.29a) o (5.29b).

**Definició 5.2 Pseudo-òptim de classe 2 :** Un iterat  $x^k$  es dirà que és un *pseudo-òptim de classe 2* (PSO2) si el resultat de la taxació feta mitjançant l'algorisme A5.4 és :

- i)  $\tilde{q} = 0$
- ii)  $\bar{\sigma} < \epsilon_o \theta(\pi^k)$
- iii)  $\|g_z^k\|_\infty > \epsilon_o \theta(\pi^k)$

és a dir,  $x^k$  satisfà (5.29a), (5.29b) però viola (5.29c).

La idea general del procés d'identificació d'òptims esta inspirada en la que implementa MINOS 5.3, i és la següent. Inicialment es considera que ens trobem lluny de l'òptim ( $tol^k = 1$ ) i es fixa un valor elevat de la tolerància  $\epsilon_\sigma^k$  de la condició (5.27). Idealment això hauria de provocar la selecció per part de l'algorisme de taxació A5.4 de candidates  $\tilde{q}$  a entrar a  $\mathcal{S}$  amb components  $\sigma_{\tilde{q}}^k$  de valor absolut elevat, aconseguint-se d'aquesta forma progressos significatius en la disminució de la funció objectiu prenent passes que relaxessin  $x_{\tilde{q}}$ . A mesura que l'optimització progressi s'arribarà a una iteració  $k$  on no es trobi cap candidata a relaxar segons el criteri (5.27), declarant-se  $x^k$  com a PSO1. En aquesta situació, es disminueix la tolerància  $\epsilon_\sigma^k$ , de forma que s'asseguri que en el pròxim procés de taxació es pugui obtenir una variable no bàsica candidata a ser relaxada, i s'intenta relaxar la variable no bàsica  $\bar{q}$  associada a  $\bar{\sigma}$ . L'aplicació repetida d'aquest procés provocarà una disminució progressiva de  $\epsilon_\sigma^k$  fins a proporcionar una taxació amb  $\bar{\sigma} < \epsilon_o \theta(\pi^k)$ , moment en que s'haurà identificat un PSO2. En aquest cas, s'incrementarà la precisió exigida en la resolució del subproblema  $(\mathbf{SN}\bar{M})^k$ , disminuint el valor  $\epsilon_\sigma^k$ , i es continuarà optimitzant  $(\mathbf{SN}\bar{M})^k$ . El detall de la implementació d'aquesta estratègia es presenta a continuació.

Consideri's una solució  $x^k$  que satisfà el test (5.25), és a dir, representa una aproximació acceptable de  $x_M^*$ . El procés que es proposa per a la comprovació de l'optimalitat de  $x^k$  és :

**Algorisme A5.5 :** Identificació d'òptims de **(FNCL)** .

**0 Inicialització.**

Donats els paràmetres d'usuari :  $\mu_{G1}, \epsilon_o \in ]0, 1[$  ,  $\mu_\sigma > 1$

S'inicialitzen :  $\epsilon_\sigma^k := 100.$ ,  $tol^k := 1$ ,  $\epsilon_G^k := \mu_{G1} \|g_z^k\|_\infty$

Sigui  $x^k = x_M^*$

**1 Taxació.**

**1.1**  $\epsilon_\sigma^k \leftarrow \max\{\epsilon_\sigma^k, \mu_\sigma \|g_z^k\|_\infty\}$

**1.2** Taxació mitjançant A5.4 : obtenció de  $\tilde{q}, \bar{q}, \bar{\sigma}$

**1.3** Si  $\tilde{q} \neq 0$  :  $q \leftarrow \tilde{q}$  ; Anada a **2**

**1.4** Si  $\tilde{q} = 0$  : anada a **3**

**2**  $x^k$  viola (5.27). **Intent de relaxació de  $x_q$ .**

**2.5** Si  $\|g_z^k\|_\infty < \max\{\bar{\sigma}/\mu_\sigma, 10^{-7} \theta(\pi^k)\}$  :

$\epsilon_G^k \leftarrow \mu_{G1} \bar{\sigma}$  ;  $tol^k \leftarrow 1$

Canvi de  $(SN\bar{M})^k$  per addició de  $q$  a  $\mathcal{S}^k$ .

**2.6** Si  $\|g_z^k\|_\infty \geq \max\{\bar{\sigma}/\mu_\sigma, 10^{-7} \theta(\pi^k)\}$  :

$\epsilon_G^k \leftarrow 0.9 \epsilon_G^k$ .  $(SN\bar{M})^k$  no es modifica.

**2.7** Anada a la passa **2** de **A3.1 (optimització de  $(SN\bar{M})^k$ )**

**3**  $x^k$  satisfà (5.27) :

**3.1** Si  $\bar{\sigma} > \epsilon_o \theta(\pi^k)$  llavors  $x^k$  és PSO1 :

$\epsilon_\sigma^k \leftarrow \max\{0.1\bar{\sigma}, \epsilon_o \theta(\pi^k)\}$  ;  $q \leftarrow \bar{q}$  ; anada a **2**.

**3.2** Si  $\bar{\sigma} < \epsilon_o \theta(\pi^k)$  llavors  $x^k$  és PSO2 :

Si  $\|g_z^k\|_\infty < \epsilon_o \theta(\pi^k)$  : **Fi** ;  $x^k$  òptim de **(FNCL)** .

Si  $\|g_z^k\|_\infty > \epsilon_o \theta(\pi^k)$  : es refina l'optimització de  $(SN\bar{M})^k$ .

$\epsilon_G^k \leftarrow 0.1 \max\{\epsilon_G^k, \|g_z^k\|_\infty\}$

Si  $\epsilon_G^k < \epsilon_o \theta(\pi^k)$  :  $\epsilon_G^k \leftarrow \epsilon_o \theta(\pi^k)$  ,  $tol^k = 2$

Anada a la passa **2** de **A3.1 (optimització de  $(SN\bar{M})^k$ )**

El criteri d'addició de la variable no bàsica  $x_q$  a  $\mathcal{S}$  aplicat a la passa **2** intenta assegurar que l'addició de  $q$  a  $\mathcal{S}$  provocarà la definició d'un nou subproblema  $(SN\bar{M})^{k+1}$  on la norma  $\|g_z^{k+1}\|_\infty$  sigui significativament superior a la norma  $\|g_z^k\|_\infty$ . Els valors per

defecte a NOXCB 9.0 dels paràmetres de la passa  $\mathbf{0}$  són  $\mu_{G_1} = 0.5$ ,  $\epsilon_o = 10^{-6}$  i  $\mu_\sigma = 1.1$ , i són modificables per l'usuari.

## 5.4 Conjunt màxim de folgues bàsiques.

L'algorisme desenvolupat aplica un tractament especial a les folgues que s'indica amb el nom de *conjunt màxim de folgues bàsiques*. Aquest tractament comença amb el procés de taxació segons l'algorisme A5.4, on, pel fet de taxar primer les folgues, si existeix alguna folga no bàsica candidata a entrar a la base aquesta es seleccionarà abans que no pas un arc no bàsic candidat. Un cop la folga ha estat transferida de  $\mathcal{N}_z$  a  $\mathcal{S}_z$ , si durant la primera iteració al nou subespai  $(\text{SN}\bar{M})^{k+1}$  la folga superbàsica no ha entrat a la base, es força la pivotació d'aquesta folga amb un arc no clau seleccionat adientment. Aquesta pivotació sempre es pot efectuar, com es demostrarà a continuació. Consideri's l'expressió del multiplicador  $\sigma_{\tilde{q}}$  associat a la folga  $\tilde{q}$  :

$$\sigma_{\tilde{q}} = -\pi^{k'} \begin{bmatrix} 0 \\ \hline e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \end{bmatrix} = -g(x^k)'_{\mathbf{B}} [B^{-1}]^k \begin{bmatrix} 0 \\ \hline e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \end{bmatrix} = -g(x^k)'_{\mathbf{B}} w$$

el producte  $w = [B^{-1}]^k \begin{bmatrix} 0 \\ \hline e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \end{bmatrix}$  es pot expressar segons (4.22) com :

$$w = \begin{bmatrix} w_{\mathcal{A}} \\ \hline w_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{\mathcal{A}}^{-1} [A_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \\ \hline Q^{-1} e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\Theta_{\mathcal{C}} | \mathbf{0}] Q^{-1} e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \\ \hline Q^{-1} e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t \end{bmatrix}$$

$w$  és el vector d'elements pivotals de la folga  $\tilde{q}$ . Si el vector  $w_{\mathcal{C}}$  d'elements pivotals associats a les variables no clau fos nul ( $w_{\mathcal{C}} = \mathbf{0}$ ) llavors tot el vector d'elements pivotals  $w$  s'anul·laria, provocant un multiplicador  $\sigma_{\tilde{q}} = 0$ . Sabem que  $\sigma_{\tilde{q}} \neq 0$ , doncs  $\tilde{q}$  ha estat seleccionada per A5.4 com a folga no bàsica a relaxar, de forma que  $w_{\mathcal{C}} \neq \mathbf{0}$ . Si  $w_{\mathcal{C}} \neq \mathbf{0}$ , llavors segur que  $w_{c_x} \neq 0$ , doncs  $w_{c_x} = \mathbf{0}$  pel fet que el vector  $e_{\tilde{q}-\tilde{n}}^t$  és ortogonal a les columnes de  $Q$  associades a folgues. Així doncs, sempre tindrem que  $w_{c_x} \neq \mathbf{0}$ , sent possible pivotar  $\tilde{q}$  amb qualsevol arc no clau associat a components no nul·les de  $w_{c_x}$ . Aplicant l'estratègia del conjunt màxim de folgues bàsiques es pretén aconseguir alleugerir el cost

de treball amb la inversa  $Q^{-1}$ , doncs les files de  $Q$  associades a folgues són columnes de la matriu identitat, segons es desprén directament de (4.9) .

# CAPÍTOL 6

## Resultats computacionals (I).

L'algorisme especialitzat descrit fins ara ha estat implementat en FORTRAN i provat sobre una ampla bateria de problemes, amb l'objectiu d'avaluar el guany en eficiència respecte al codi de propòsit general MINOS 5.3 i el comportament de certes variants algorísmiques. Dins d'aquest capítol es descriurà breument les característiques de la implementació desenvolupada, la bateria de problemes usats i els resultats computacionals obtinguts.

### 6.1 Descripció del paquet NOXCB 9.0.

NOXCB 9.0 és un paquet d'optimització per a la resolució del problema **(FNCL)** que implementa l'algorisme desenvolupat al llarg de la primera part de la tesi. NOXCB 9.0 incorpora les rutines LEXA [62] d'optimització de fluxos lineals en xarxes per a la resolució de la fase 0, i les rutines FXCB [44] d'optimització de fluxos lineals amb constriccions a banda lineals per a l'execució de la fase 1. La inclusió d'aquestes rutines fa que NOXCB 9.0, a més de resoldre problemes **(FNCL)**, pugui també resoldre eficientment problemes de fluxos lineals, amb i sense constriccions a banda lineals. A més, com a cas particular del problema **(FNCL)**, NOXCB 9.0 pot resoldre problemes purs de fluxos no lineals.

El codi NOXCB 9.0 ha estat desenvolupat en FORTRAN 77, inicialment en entorn VMS més tard a entorn Unix. S'ha executat sobre plataformes VAX i Workstations Sun Sparc 2, 10 i Digital Alpha. La seva execució sobre altres plataformes no hauria de plantejar cap problema, doncs el codi ha seguit l'estàndard 77.

### 6.1.1 Composició del paquet.

El paquet NOXCB 9.0 es compon dels catorze fitxers de codi font FORTRAN que s'indiquen a continuació<sup>7</sup> :

- 1.- noxcb09.f : conté el programa principal necessari per a l'ús de NOXCB 9.0 com a programa aïllat. Després de demanar el nom del model a resoldre llegeix el fitxer de dades, obre una sèrie de fitxers necessaris per a l'execució de NOXCB 9.0 i crida a la rutina [snoxcb09].
- 2.- snoxcb09.f : rutina [snoxcb09] de resolució del problema (**FNCL**). Conté el cos principal de les tres fases de l'algorisme. Per paràmetres, rep la descripció del problema (**FNCL**) i torna el valor de les variables a l'òptim i la funció objectiu. Crea, a més d'altres, un fitxer amb informació sobre l'evolució del procés d'optimització i l'estat de variables i constriccions a l'òptim.
- 3.- noeres05.f : rutines relacionades amb l'escriptura d'informació a fitxers a disc.
- 4.- noexli11.f : rutines relacionades amb l'exploració lineal i l'actualització de variables.
- 5.- noline11.f : rutines relacionades amb la fase 1 (excloses les rutines de pivotació).
- 6.- noqnew01.f : rutines relacionades amb l'actualització quasi-Newton.
- 7.- noauxi02.f : rutines auxiliars, incloent les rutines de lectura/escriptura de dades i bases del problema.
- 8.- noesnu11.f : rutines relacionades amb les iteracions al subespai nul, excloent les d'actualització quasi-Newton.
- 9.- noetes05.f : rutines relacionades amb la reinversió/actualització de la base de treball.
- 10.- nofas007.f : rutines d'execució de la fase 0.
- 11.- nopivo09.f : rutines de pivotació.

---

<sup>7</sup> Els fitxers que contenen el codi font s'indiquen amb lletra d'impressió amb l'extensió (p.ex.:prog.f) i els codis executables amb lletra d'impressió (prog). Les rutines s'indiquen amb lletra d'impressió entre claudators ([sub]).

- 12.- NOXCB.PAR : fitxer de dimensions màximes del problema. S'inclou en temps de compilació amb la comanda INCLUDE.
- 13.- TOLCIA09.CMN : common de toleràncies del problema. S'inclou en temps de compilació amb la comanda INCLUDE.
- 14.- ETES.CMN : common que conté l'estructura de dades de la inversió/factorització de la base de treball. S'inclou en temps de compilació amb la comanda INCLUDE.

### 6.1.2 Ús del paquet NOXCB 9.0.

El paquet NOXCB 9.0 pot ser usat com a programa aïllat o com a subrutina. Com a programa aïllat, només cal executar el programa `noxcb09`, indicant el nom del fitxer que conté la descripció del problema. Com a subrutina, l'usuari ha d'incloure dins del seu codi una crida a la rutina [`snoxcb09`], passant, com a paràmetres d'entrada, la descripció del problema (**FNCL**) a resoldre.

L'execució del paquet NOXCB 9.0 depèn de dos fitxers llegits en temps d'execució, que anomenarem `model.dat` i `model.tol`, i d'una subrutina d'usuari, que anomenarem [`vfug`] :

- 1.- `model.dat` : conté la descripció de la xarxa, de les constriccions a banda i de les fites de les variables. Quan s'usa NOXCB 9.0 com a subrutina, la lectura d'aquest fitxer és opcional, doncs la descripció de la xarxa i constriccions a banda es realitza via el pas de paràmetres a la rutina [`snoxcb09`]. El paquet NOXCB 9.0 disposa de rutines de lectura/escriptura que poden ésser usades per l'usuari per a crear/recuperar fitxers `model.dat` des del seu programa principal.
- 2.- `model.tol` : conté el valor per defecte de les toleràncies numèriques i paràmetres de control de certes variants algorísmiques de la implementació. Aquests valors per defecte poden ser modificats per l'usuari directament sobre el fitxer `model.tol` o des del seu programa principal, si s'usa NOXCB 9.0 com a subrutina, doncs l'usuari té l'opció de carregar el contingut del fitxer `model.tol` a les variables dels grups COMMON definits a `TOLCIA09.CMN` abans de cridar a [`snoxcb09`]. El paquet NOXCB

9.0 disposa de rutines de lectura/escriptura del fitxer `model.tol` que poden ser usades per l'usuari des de programa.

- 3.- `[vfug]` : rutina d'usuari pel càlcul del valor de la funció objectiu i del vector gradient a partir del valor de les variables passat per NOXCB 9.0.

La sortida de NOXCB 9.0 consisteix en tres fitxer, `model.ph0`, `model.p2n` i `model.ncb`

- 1.- `model.ph0` : fitxer que conté la informació necessària per a recuperar el punt pseudo-factible trobat a la fase 0.
- 2.- `model.p2n` : fitxer que conté la informació necessària per a recuperar un punt iterat de la fase 1 o 2. S'actualitza cada cert nombre d'iteracions. Si s'assoleix l'òptim, conté la base òptima.
- 3.- `model.ncb` : fitxer que conté informació sobre el procés d'optimització i l'estat de variables i constriccions a l'òptim.

### 6.1.3 Opcions algorísmiques implementades a NOXCB 9.0.

El paquet NOXCB 9.0 implementa la major part de les característiques de l'algorisme de resolució del problema (FNCL) descrit als capítols precedents. A continuació es descriuran aquestes característiques, així com els valors que el paquet pren per defecte. Totes les opcions que s'indicaran es poden seleccionar a través dels paràmetres del fitxer `model.tol` :

- 1.- *Resolució de problemes de fluxos lineals* : el paquet NOXCB 9.0 està format per tres mòduls diferents. El primer resol problemes de fluxos lineal en xarxes. Està basat en les rutines LEXA [62] i s'usa, durant la resolució de problemes (FNCL) pel càlcul d'una solució pseudo-factible. El segon mòdul resol problemes de fluxos lineals amb constriccions a banda, es basa en les rutines FXCB [44], i s'executa pel càlcul d'una solució inicial factible de (FNCL). El tercer mòdul resol el problema (FNCL) a partir de solucions factibles. Aquests mòduls es poden usar també de forma independent. Així doncs, NOXCB 9.0 pot resoldre problemes de fluxos lineals en xarxes indicant, mitjançant el fitxer `model.tol`, que la funció objectiu és lineal i que es vol calcular una



solució òptima a la fase 0. Si s'indica funció objectiu lineal i es defineixen constriccions a banda, NOXCB 9.0 executarà només els dos primers mòduls per tal de resoldre el problema (**FLCL**) definit. En cas de voler resoldre problemes amb funció objectiu lineal els costos lineals de les variables es defineixen al fitxer `model.dat`.

- 2.- Taxació : la implementació de l'algorisme de taxació A5.4 permet que l'usuari fixi el nombre d'arcs  $n_{tax}$  que compondran els blocs de taxació dels arcs no bàsics. Si l'usuari no en fixa cap, es pren per defecte el valor  $n_{tax} = \max\{10, \lfloor \tilde{n} - m \rfloor / 10\}$ . El control de bloquejos descrit a la secció 5.3.2 també ha estat implementat, tot i que per defecte està inactiu.
- 3.- Inversió/factorització base de treball : l'usuari pot decidir entre usar una factorització LU per a la resolució dels sistemes d'equacions amb la base de treball o usar la Forma en Producte de la Inversa segons la metodologia presentada a la secció 4.3.1. Per defecte s'aplica aquest darrer mètode, doncs s'ha mostrat més ràpid, però en els casos amb major nombre de constriccions a banda actives a l'òptim és recomanable el pas a factorització LU per raons d'estabilitat numèrica. El nombre màxim d'etes d'actualització per pivotació (secció 3.2.2) és 50 per defecte, modificable per l'usuari.
- 4.- Operacions amb B i Z : NOXCB 9.0 incorpora rutines que implementen tots els algorismes d'operació amb  $B$  i  $Z$  descrits a la secció 4.2. Aquestes rutines s'han separat en dos grups, segons l'ús que facin de l'estructura de cicles no clau  $\overset{\circ}{C}$  i superbàsics  $\overset{\circ}{S}$ . El primer grup està format per les rutines que no exploten  $\overset{\circ}{C}$  ni  $\overset{\circ}{S}$ , i corresponen als algorismes A4.6, A4.8, A4.10, A4.12, A4.14 i A4.17. El segon grup el componen les rutines associades a algorismes que exploten l'emmagatzematge explícit de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ , és a dir, els algorismes A4.9, A4.11, A4.13, A4.15 i A4.19. Per defecte s'usa el primer grup, doncs s'ha observat que, en general, proporciona temps d'execució inferiors. No obstant, en alguns problemes de grans dimensions pot ser necessari commutar al segon grup per tal d'evitar problemes numèrics com el descrit a la secció 4.2.5. De fet l'estratègia consistent en usar un dels dos grups de rutines durant tot el procés d'optimització no és l'estratègia òptima, doncs al llarg de la secció 4.2 s'ha demostrat que l'eficiència òptima s'assoleix seleccionant a cada iteració l'algorisme que determini el signe dels escalars  $\psi(\cdot)^k$  expressats a (4.41). Malgrat que la determinació de les constants  $\kappa(\cdot)$  associades a les funcions  $\psi(\cdot)$ , ja ha estat realitzada, la implementació d'aquesta metodologia encara no s'ha dut a terme.

- 5.- Càlcul de direccions de descens : NOXCB 9.0 aplica per defecte el Mètode quasi-Newton (MQN) si el nombre de superbàsiques és inferior a  $\bar{s} = 500$ , commutant al Mètode de Newton Truncat (MNT) per valors superiors. L'usuari pot modificar el valor del paràmetre  $\bar{s}$ , així com forçar l'aplicació de MNT o de MQN a totes les iteracions. Els valors per defecte de les toleràncies  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  i del paràmetre  $i_{max}$  de l'algorisme del MNT A5.3 són  $\eta_0 = 10^{-4}$ ,  $\eta_1 = 0.5$ ,  $i_{max} = 20$ .  $\eta_0$  i  $\eta_1$  són modificables per l'usuari, però  $i_{max}$  és un paràmetre fix del programa.
- 6.- Exploració Lineal : NOXCB 9.0 realitza l'exploració lineal per ajustos quadràtics i cúbics mitjançant la rutina GETPTC del paquet MINOS 5.3. La precisió de l'exploració lineal es controla mitjançant la constant  $\beta$  de la segona condició d'Armijo-Goldstein (equació (6.3.4.a) de [25]), sent el seu valor per defecte  $\beta = 0.1$ . S'ha programat també l'algorisme de A5.2 d'exploració lineal de Bertsekas segons ha estat descrit a la secció 5.2.1. L'aplicació d'aquest algorisme depèn del valor de la tolerància  $\epsilon_{QA}$  usada a (5.4) per a construir la llista  $Q$  de variables superbàsiques amb fites quasi-actives, del paràmetre  $\alpha^1$  i de la tolerància  $\mu_{ELB}$  de l'algorisme A5.2. Els valors per defecte són  $\epsilon_{QA} = 10^{-10}$ ,  $\alpha^1 = 2$  i  $\mu_{ELB} = 0.1$ , modificables per l'usuari. Les proves computacionals realitzades amb el mètode de Bertsekas desaconsellen però el seu ús.
- 7.- Identificació de l'òptim : Els valors per defecte dels paràmetres del mètode de detecció d'òptims del problema (FNCL) (algorisme A5.5) són  $\mu_{G1} = 0.5$ ,  $\epsilon_o = 10^{-6}$  i  $\mu_\sigma = 1.1$ , i són modificables per l'usuari.

## 6.2 Descripció de la col·lecció de problemes EIO/UPC.

Aquesta secció està dedicada a la descripció dels problemes EIO/UPC. Aquests són un conjunt de problemes (FNCL) usats en els experiments computacionals duts a terme per avaluar l'eficiència del paquet NOXCB 9.0. La col·lecció de problemes creada a tal efecte consta de 105 problemes (FNCL) dividits en dos grups, els problemes *DIMACS* i els problemes de *Coordinació Hidro-Tèrmica* :

- 1.- *Problemes DIMACS* : són problemes creats amb els generadors aleatoris de xarxes *Rmfgen*, *Grid-on-Torus* i *Gridgen* provinents del “First DIMACS International Algorithm Implementation Challenge” [26]. Aquests generadors proporcionen problemes de fluxos lineals en xarxes sense constriccions a banda. Les constriccions a banda lineals associades als problemes DIMACS han estat definides mitjançant un generador aleatori propi, *Di2no*, que es descriurà més endavant. S’han usat quatre tipus diferents de funcions objectiu. Dues corresponen a funcions objectiu no lineals relacionades amb la família definida per Toint i Tuyttens a [72] i les dues restants corresponen a una família pròpia de funcions no lineals que es descriuran més endavant.
- 2.- *Problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica* : són problemes (**FNCL**) provinents de models d’Optimització i Planificació Hidro-Tèrmica que seran desenvolupats a la segona part de la memòria de tesi.

S’ha volgut testejar el codi NOXCB 9.0 amb una col·lecció de problemes el més heterogènea possible, per tal que les conclusions extretes de les proves computacionals fossin aplicables a la major part possible de situacions d’ús del paquet. En aquest sentit, la col·lecció de problemes generada conté problemes amb xarxes des de 1524 arcs i 360 nusos fins a 23832 arcs i 6589 nusos, amb un nombre de constriccions a banda que representa des de un 1% del nombre d’equacions de xarxa fins a un 100%, amb percentatge d’elements no nuls de les constriccions a banda des de un 0.02% fins a un 10%. Aquests problemes s’han executat amb funcions objectiu que proporcionen òptims amb un nombre de variables superbàsiques que oscil·la desde 0 fins a 3352 (un 80% del nombre de variables fora de la base) i amb un nombre de constriccions a banda actives que representen entre un 0% i un 60% del nombre d’equacions de xarxa.

### 6.2.1 Problemes DIMACS.

Els generadors *Rmfgen*, *Gridgen* i *Grid-on-Torus* són de distribució gratuïta a través de la xarxa Internet. Es poden aconseguir via `anonymous ftp` a l’adreça `dimacs.rutgers.edu` del directori `/pub/netflow`. Tots ells generen problemes de fluxos lineals sense constriccions a banda en format estàndard DIMACS. Aquest format consisteix en un fitxer ASCII que conté el nombre de nusos i arcs de la xarxa, les injeccions/extraccions de flux als nusos i, per a cada arc, els nusos origen i destí, la capacitat màxima i mínima i el cost. Per tal

d'ampliar el format DIMACS amb la incorporació d'un conjunt factible de constriccions a banda lineals s'ha desenvolupat el generador Di2no.

### 6.2.1.1 Di2no : generador aleatori de constriccions a banda.

La idea bàsica de l'obtenció d'un conjunt factible de constriccions a banda consisteix en definir una sèrie de constriccions lineals sobre una solució que sigui factible respecte de les equacions de xarxa. Aquesta solució s'obté amb les rutines LEXA [62]. El nombre i les característiques bàsiques del conjunt de constriccions a banda definides es fixen mitjançant vuit paràmetres d'usuari. Aquests paràmetres són :

- 1.-  $\underline{seed}_2$  : llavor de la funció de generació de nombre aleatoris.  $seed_1$  es reserva per la llavor dels generadors DIMACS.
- 2.-  $\%cab$  : fracció del nombre de constriccions a banda respecte del nombre d'equacions de xarxa ( $\%cab=100$ . implica que n'hi ha tantes constriccions a banda com equacions de xarxa).
- 3.-  $\underline{esp}$  : grau d'esparsitat de les constriccions a banda. Indica la fracció, en tant per cent, que representen els elements no nuls respecte del total d'elements de les constriccions a banda.
- 4.-  $\%act$  : representa el percentatge de constriccions a banda d'igualtat. És una fita inferior al nombre de constriccions a banda actives a l'òptim.
- 5.-  $\underline{t_{ij}^{max}, t_{ij}^{min}}$  : valor màxim i mínim permès pels elements de les constriccions a banda.
- 6.-  $\underline{\delta_E, \delta_L}$  : pertorbacions del terme independent de les constriccions a banda d'igualtat i de desigualtat respectivament.

Sigui la xarxa definida per  $Ax = b$ ,  $0 \leq x \leq u$  amb  $n$  arcs i  $m$  nusos, i sigui  $\tilde{x}$  una solució factible associada a aquesta xarxa. Amb els paràmetres  $seed_2$ ,  $\%cab$ ,  $esp$ ,  $\%act$ ,  $t_{ij}^{max}$ ,  $t_{ij}^{min}$ ,  $\delta_E$  i  $\delta_L$  fixats per l'usuari, el generador Di2no defineix un conjunt de constriccions a banda segons el procediment indicat a la figura 6.1. La funció  $random(\cdot)$  de generació de nombres aleatoris entre 0 i 1 és la referenciada a [70].  $tcb_i = ' E'$  indica que la  $i$ -èsima constricció a banda es defineix com d'igualtat, i  $tcb_i = ' L'$  indica que es defineix com de menor o igual. Aquest procediment assegura l'obtenció d'un conjunt de

Inicialitzacions :

$t := \max\{1., \lfloor \%cab \times m + 0.5 \rfloor\}$  (nombre de cons. a banda)

**for each**  $i = 1$  **to**  $t$

$nel_i := 0$  (comptador nre. elements per fila)

$st_i := 0.$  (valor cons. a banda  $i$ -èssima a  $\tilde{x}$ )

Definició dels elements  $t_{ij}$  :

**for each**  $j = 1$  **to**  $n - 1$

**for each**  $i = 1$  **to**  $t$

$aux1 := 100. \times \text{random}(seed_2)$

**if**  $aux1 < esp$  **then**

$t_{ij} := (t_{ij}^{max} - t_{ij}^{min}) \times \text{random}(seed_2) + t_{ij}^{min}$

$st_i := st_i + t_{ij}\tilde{x}_j$

$nel_i := nel_i + 1$

(Tractament especial última columna per a evitar cons. a banda buides)

**for each**  $i = 1$  **to**  $t$

$aux1 := 100. \times \text{random}(seed_2)$

**if**  $aux1 < esp$  **or**  $nel_i = 0$  **then**

$t_{in} := (t_{ij}^{max} - t_{ij}^{min}) \times \text{random}(seed_2) + t_{ij}^{min}$

$st_i := st_i + t_{ij}\tilde{x}_n$

Definició dels termes independents :

**if**  $\%act \neq 0$  **then**  $t_E := \max\{1, \%act \times t/100.\}$

**else**  $t_E := 0$

**for each**  $i = 1$  **to**  $t$

**if**  $i \leq t_E$  **then**  $tcb_i := 'E'$   $r_i := \delta_E st_i$

**else**  $tcb_i := 'L'$   $r_i := \delta_L st_i$

---

**Figura 6.1 :** Di2no, generador de constriccions a banda

constriccions lineals factibles si  $\delta_E = \delta_L = 1$  doncs, en aquest cas, segur que, com a mínim, el punt  $\tilde{x}$  és factible.

### 6.2.1.2 Models Rmfgen.

El generador Rmfgen, desenvolupat per Goldfarb i Grigoriadis [35], produeix, a partir dels paràmetres  $a$  i  $b$ , una xarxa de  $a \times a \times b$  nusos a partir de  $b$  subxarxes reticulades de dimensió  $a \times a$ . A cada subxarxa tots els nusos estan connectats amb els seus veïns, i els quatre nusos situats als vertexs de cada subxarxa es connecten amb els nusos dels vertexs de la subxarxa següent. El nus font és el vertex inferior esquerra de la primera subxarxa i el nus pou el vertex superior dreta de la  $b$ -èsima subxarxa. Les capacitats són enteres i es seleccionen aleatòriament dins del rang  $[c_1, c_2]$  pels arcs de connexió de vertexs i  $c_2 \times a \times a$  pels arcs de les subxarxes. El generador Rmfgen usat en aquesta tesi correspon a la versió modificada descrita a [11]. Aquesta modificació consisteix en l'assignació de costos lineals, triats aleatòriament dins del rang  $[0, cost]$  i en la selecció aleatòria dins del rang  $[0, dem]$  del valor del flux injectat pel nus font i extret pel nus pou. Les taules 6.1 i 6.2 indiquen les característiques dels problemes generats amb Rmfgen. Les primeres set columnes corresponen als valors usats en la generació automàtica de les constriccions a banda amb el generador Di2no, i les darreres cinc columnes indiquen les característiques més rellevants dels problemes: nombre d'arcs  $n$ ; nombre de nusos  $m$ ; nombre de constriccions a banda  $t$ ; nombre de constriccions a banda d'igualtat  $t_E$  i nombre d'elements no nuls de les constriccions a banda  $nel$ . La taula 6.1 correspon als models *rmfa*, de mida petita, i la taula 6.2 als models *rmfb*, considerats de mida mitjana.

### 6.2.1.3 Models Gridgen.

El generador Gridgen va ésser desenvolupat per Y. Lee and J. Orlin. Aquest generador crea una xarxa reticulada més un nus super pou. A més dels arcs que connecten els nusos de la retícula, dels nusos font surten arcs amb capacitat "infinita" cap al super pou, i als nusos pou arriben arcs, també amb capacitat "infinita" provinents del super pou, garantint-se així la factibilitat dels fluxos.

La forma d'operar d'aquest generador és la següent. Primer, es crea una xarxa de  $n_1 \times n_2$ , nusos. Els nusos es numeren de 1 fins a  $n_1 \times n_2$  i el super pou es numera com a  $n_1 \times n_2 + 1$ . Llavors, es generen un o dos arcs, en sentits oposats, entre els nusos adjacents, a elecció de l'usuari. Si es tria generar només un arc entre nusos adjacents, el sentit dels arcs s'anirà alternant. Si un cop definits aquests arcs, més els arcs entre els nusos font i

Taula 6.1 : Models *rmfa*.

	Paràmetres Di2no ( $seed_2 = 46533591$ )							Dimensions				
	%cab	esp	%act	$t_{ij}^{max}$	$t_{ij}^{min}$	$\delta_E$	$\delta_L$	$n$	$m$	$t$	$t_E$	nel
rmfa1111	1	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	4	1	4
rmfa2111	5	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	18	1	18
rmfa3111	10	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	1	36
rmfa4111	50	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	180	1	180
rmfa5111	100	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	360	3	363
rmfa3211	10	1.000	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	1	538
rmfa3311	10	10.000	1	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	1	5387
rmfa3221	10	1.000	10	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	3	538
rmfa3241	10	1.000	100	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	36	538
rmfa3231	10	1.000	50	1.0	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	18	538
rmfa2112	5	0.010	1	$10^5$	0.1	1.0	1.5	1524	360	18	1	18
rmfa3132	10	0.010	50	$10^5$	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	18	36
rmfa3232	10	1.000	50	$10^5$	0.1	1.0	1.5	1524	360	36	18	538

- Paràmetres Rmfgen :  $a = 6, b = 10, c_1 = 0, c_2 = 1000, cost = 500, dem = 1000, seed_1 = 786814053$ .

Taula 6.2 : Models *rmfb*.

	Paràmetres Di2no ( $seed_2 = 46533591$ )							Dimensions				
	%cab	esp	%act	$t_{ij}^{max}$	$t_{ij}^{min}$	$\delta_E$	$\delta_L$	$n$	$m$	$t$	$t_E$	nel
rmfb1111	1	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	12	1	13
rmfb3111	10	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	120	1	138
rmfb4111	50	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	600	6	658
rmfb5111	100	0.010	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	1200	12	1338
rmfb3211	10	1.000	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	120	1	6492
rmfb3311	10	5.000	1	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	120	1	32360
rmfb3221	10	1.000	10	1.0	0.1	1.0	1.5	5420	1200	120	12	138
rmfb3132	10	0.010	50	$10^6$	0.1	1.0	1.5	5420	1200	120	60	6491

- Paràmetres Rmfgen models 1111 a 5111 :  $a = 10, b = 12, c_1 = 0, c_2 = 1000, cost = 100, dem = 1000, seed_1 = 786364080$
- Paràmetres Rmfgen models 3211 a 3221 :  $a = 10, b = 12, c_1 = 0, c_2 = 500, cost = 1000, dem = 1000, seed_1 = 787515659$

pou i el super pou, no s'assoleix el nombre d'arcs demanat per l'usuari, es generen arcs addicionals entre parells de nusos triats a l'atzar. No es controla l'existència de més d'un arc entre el mateix parell origen-destí, però mai existiran arcs amb origen i destí al mateix

nus. Es seleccionen parells de nusos font/pou, calculant les seves produccions i demandes amb un desequilibri calculat segons una distribució uniforme. Els paràmetres d'entrada de Gridgen s'indiquen a la taula 6.3.

S'han generat dos grups de problemes amb el generador Gridgen. Els models *ggeb* són models de mida mitjana, i les seves característiques s'indiquen a la taula 6.4. Els models *gged* són problemes considerats de gran escala, i es troben descrits a la taula 6.5.

**Taula 6.3 :** Paràmetres del generador Gridgen.

$a$ : control de creació d'arcs dobles :	$g$ : tipus de distribució dels costos dels arcs :
$a = 1$ : es generarà un parell d'arcs entre cada parell de nusos adjacents.	$g = 1$ : distribució uniforme. Es generen costos dins del rang $[g_1, g_2]$ .
$a = 0$ : es generarà només un arc entre nusos adjacents.	$g = 2$ : distribució exponencial. S'ha d'indicar $h_1 = \lambda$ , el paràmetre de la distribució.
$seed_1$ : llavor del generador de nombres aleatoris.	$h$ : tipus de distribució de les capacitats als arcs :
$b$ : nombre de nusos.	$h = 1$ : distribució uniforme. Es generen les capacitats dins del rang $[h_1, h_2]$ .
$c$ : amplada de la retícula.	$h = 2$ : distribució exponencial. S'ha d'indicar $i_1 = \lambda$ , el paràmetre de la distribució.
$d_1, d_2$ : nombre de nusos font i pou	
$e$ : grau promig.	
$f$ : flux total.	

#### 6.2.1.4 Models Grid-on-Torus.

El generador Grid-on-Torus va ésser desenvolupat per A.V. Goldberg (1991, Dept. of Computer Science, Stanford University). Produeix problemes de transport amb capacitats sobre una xarxa toroidal. Necessita cinc paràmetres: el nombre de nusos  $a$ , el nombre d'arcs  $b$ , la capacitat màxima  $c$ , el cost màxim  $d$  i la llavor del generador de nombres aleatoris  $seed_1$ . Amb aquest generador s'han definit els models de gran escala *gotd* descrits a la taula 6.6



Taula 6.4 : Models *ggeb*.

	Paràmetres Di2no ( $seed_2 = 46533591$ )							Dimensions				
	$\%cab$	$esp$	$\%act$	$t_{ij}^{max}$	$t_{ij}^{min}$	$\delta_E$	$\delta_L$	$n$	$m$	$t$	$t_E$	$nel$
<b>ggeb1121</b>	1	0.100	10	1.0	0.1	100.0	100.0	4008	501	5	1	20
<b>ggeb3121</b>	10	0.100	10	1.0	0.1	10.0	100.0	4008	501	50	5	198
<b>ggeb4121</b>	50	0.100	10	1.0	0.1	10.0	10.0	4008	501	251	25	1013
<b>ggeb5121</b>	100	0.100	10	1.0	0.1	1.5	1.5	4008	501	501	50	2040
<b>ggeb4221</b>	50	1.000	10	1.0	0.1	10.0	10.0	4008	501	251	25	9973
<b>ggeb4321</b>	50	5.000	10	1.0	0.1	10.0	10.0	4008	501	251	25	50203
<b>ggeb4131</b>	50	0.100	50	1.0	0.1	1.0	1.0	4008	501	251	125	1013
<b>ggeb4141</b>	50	0.100	100	1.0	0.1	1.0	1.0	4008	501	251	251	1013
<b>ggeb4132</b>	50	0.100	50	$10^5$	0.1	1.0	1.0	4008	501	251	125	1013

- Paràmetres Gridgen :  $a = 0$ ,  $seed_1 = seed_2$ ,  $b = 501$ ,  $c = 25$ ,  $d_1 = 200$ ,  $d_2 = 200$ ,  $e = 8$ ,  $f = 2000$ ,  $g = 1$ ,  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 10$ ,  $h = 1$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 100$ .

Taula 6.5 : Models *gged*.

	Paràmetres Di2no ( $seed_2 = 46533591$ )							Dimensions				
	$\%cab$	$esp$	$\%act$	$t_{ij}^{max}$	$t_{ij}^{min}$	$\delta_E$	$\delta_L$	$n$	$m$	$t$	$t_E$	$nel$
<b>gged1121</b>	1	0.100	10	1.0	0.1	100.0	100.0	12008	1501	15	1	182
<b>gged3121</b>	10	0.100	10	1.0	0.1	10.0	100.0	12008	1501	150	15	1834
<b>gged4121</b>	50	0.100	10	1.0	0.1	1.0	1.0	12008	1501	751	75	9054
<b>gged4131</b>	50	0.100	50	1.0	0.1	1.0	1.0	12008	1501	751	375	9054
<b>gged4141</b>	50	0.100	100	1.0	0.1	1.0	1.0	12008	1501	751	751	9054
<b>gged4122</b>	50	0.100	10	100.	0.1	1.0	1.0	12008	1501	751	75	9054

- Paràmetres Gridgen :  $a = 0$ ,  $seed_1 = seed_2$ ,  $b = 1500$ ,  $c = 100$ ,  $d_1 = 500$ ,  $d_2 = 500$ ,  $e = 8$ ,  $f = 5000$ ,  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 10$ ,  $h = 1$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 100$ .

Taula 6.6 : Models *gotd*.

	Paràmetres Di2no ( $seed_2 = 46533591$ )							Dimensions				
	$\%cab$	$esp$	$\%act$	$t_{ij}^{max}$	$t_{ij}^{min}$	$\delta_E$	$\delta_L$	$n$	$m$	$t$	$t_E$	$nel$
<b>gotd1121</b>	1	0.100	10	1.0	0.1	1.0	1.0	18000	3000	30	3	527
<b>gotd2121</b>	10	0.100	10	1.0	0.1	1.0	1.0	18000	3000	300	30	5390
<b>gotd3121</b>	25	0.100	10	1.0	0.1	1.0	1.0	18000	3000	750	75	13537
<b>gotd2131</b>	10	0.100	50	1.0	0.1	1.0	1.0	18000	3000	300	150	5390

- Paràmetres Grid-on-torus :  $a = 3000$ ,  $seed_1 = seed_2$ ,  $b = 18000$ ,  $c = 100$ ,  $d = 10$ .

### 6.2.1.5 Models amb funció objectiu Namur.

Les funcions objectiu de la família Namur han estat derivades de la família de funcions objectiu usades en les proves computacionals del codi d'optimització de fluxos no lineals purs presentat a [72]. La seva expressió és :

$$f(x) = \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{c_2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + x_i^2 + (x_i - x_{i+1})^2} + \frac{1}{c_3} \left( 10 + \sum_{i=1}^n (-1)^i x_i \right)^4 \right) \quad (6.1)$$

La característica més remarcable d'aquestes funcions és que provoquen problemes amb un nombre extremadament alt de variables superbàsiques a la solució, el que fa que siguin especialment apropiades per a testejar l'eficàcia i robustesa del mètode de resolució d'iteracions al subespai nul. S'han usat dues funcions diferents de la família (6.1), identificades amb els codis 10 i 13, amb els valors dels paràmetres  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  que s'indica a la taula 6.7. Aquesta taula inclou els models DIMACS resolts amb les funcions objectiu Namur.

**Taula 6.7 :** Paràmetres i models de les funcions objectiu Namur.

NOM	$c_1$	$c_2$	$c_3$	Models
10	$10^3$	$10^3$	$1.2 \cdot 10^3$	rmfa, rmfb
13	1.	$10^5$	$1.2 \cdot 10^5$	ggeb

### 6.2.1.6 Models amb funció objectiu EIO1.

Les funcions objectiu EIO1 van éser dissenyades per tal d'aconseguir problemes amb un nombre moderat de variables superbàsiques a la solució, permetent així l'avaluació del comportament de NOXCB 9.0 en situacions d'optimització diferents de les associades a les funcions Namur. L'expressió de la família de funcions EIO1 és la següent :

$$f(x) = k_1 \left\{ \sum_{i=1}^n c_i (x_i + k_2 x_i^2) + k_3 \left[ \sum_{i=1}^{n-2} c_i (x_i x_{i+1} x_{i+2})^2 + c_{n-1} (x_{n-1} x_n)^2 \right] \right\} \quad (6.2)$$

on  $c_i$  és el cost lineal assignat pels generadors DIMACS a l'arc  $i$  de la xarxa, i els escalars  $k_1$  a  $k_3$  defineixen els diferents membres de la família. L'expressió dels membres de (6.2) emprats en les proves computacionals han estat generats amb els valors dels paràmetres  $k_i$

indicats a la taula 6.8, on també s'indiquen els problemes DIMACS resolts amb funcions EIO1. Noti's que la funció EIO1 20 és una funció lineal, mentre que la funció EIO1 22 és quadràtica. L'optimització dels models DIMACS amb la funció objectiu 20 s'ha dut a terme declarant-la com a funció objectiu no lineal, és a dir, executant la fase 2 pròpia de problemes no lineals, amb l'objectiu d'avaluar l'eficiència de la implementació de les parts de l'algorisme deslligades del tractament de la no linealitat de la funció objectiu. A més, segons indiquen alguns autors, el grau d'eficiència assolit amb funcions objectiu lineals proporciona una fita superior de l'eficiència dels codis especialitzats d'optimització no lineal.

**Taula 6.8 :** Paràmetres i models de les funcions objectiu EIO1.

NOM	$k_1$	$k_2$	$k_3$	Models
<b>20</b>	1.	0.	0.	rmfa, rmfb
<b>21</b>	0.01	0.01	0.001	ggeb, gotd
<b>22</b>	0.01	0.01	0.	rmfa, rmfb, ggeb, gged

## 6.2.2 Problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica.

El problema de la producció d'energia elèctrica de forma coordinada entre centrals tèrmiques i hidràuliques al llarg d'un cert període de temps s'acostuma a abordar mitjançant models de fluxos en xarxes. Aquests models han d'incorporar constriccions a banda si es vol tenir una descripció realista de les condicions de producció d'energia elèctrica, proporcionant d'aquesta forma problemes **(FNCL)**. Depenent de com es modelitzi el sistema de generació, s'obtenen models d'*Optimització Hidro-Tèrmica* o de *Planificació Hidro-Tèrmica*. Les característiques físiques d'aquests models seran descrites amb detall a la segona part de la tesi. De moment ens limitarem a descriure les seves característiques com a problemes **(FNCL)**.

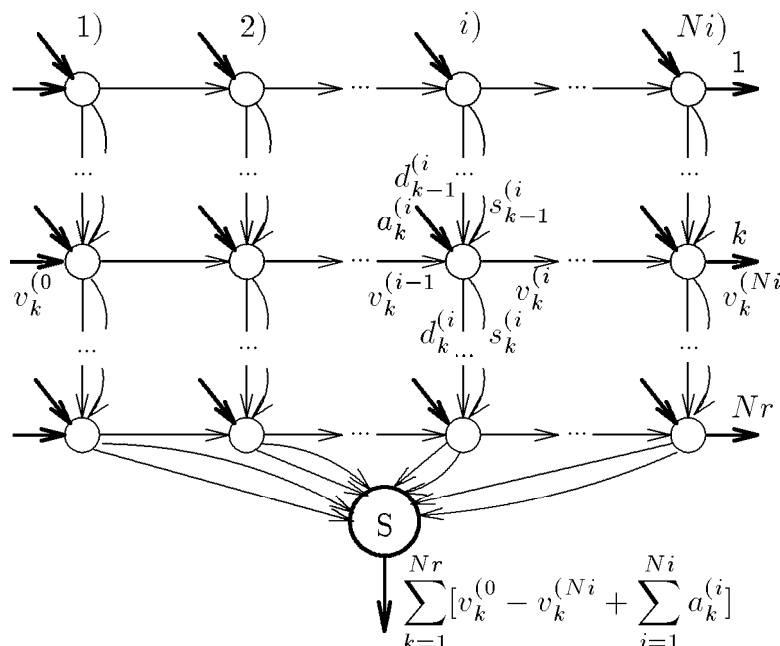
### 6.2.2.1 Models d'Optimització Hidrotèrmica.

Els models d'Optimització Hidro-Tèrmica plantejen problemes **(FNCL)** sobre xarxes

reticulades com la indicada a la figura 6.2. La funció objectiu a optimitzar és :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{Ni} \sum_{k=1}^{Nr} \left[ (l_k - c^{(i)} H_k^{(i)}(x) + q_k H_k^{(i)}(x)^2 + \bar{P} \left( 1 - e^{-K(\bar{H}_k^{(i)} - H_k^{(i)}(x))} \right) + \pi_s s_k^{(i)} (\bar{v}_k - v_k^{(i)}) \right]$$

on la funció  $H_k^{(i)}(x)$  és un polinomi de grau 5, i tot allò que no sigui el vector de variables  $x$  són paràmetres coneguts.



**Figura 6.2 :** Xarxa dels problemes d'Optimització Hidro-Tèrmica.

Les característiques dels problemes d'Optimització Hidrotèrmica resoltos es poden trobar a la taula 6.9. El significat de les columnes d'aquesta taula és similar a les dels models DIMACS. És notable el fet que alguns d'aquests models presenten un elevat nombre de constriccions a banda, totes de  $\geq$ , en relació al nombre d'equacions de xarxa (columna %cab), així com un conjunt de constriccions a banda relativament denses ( $esp > 1.5$ ).

### 6.2.2.2 Model de Planificació Hidro-Tèrmica.

La xarxa dels model de Planificació Hidro-Tèrmica s'obtenen a partir de la xarxa dels models d'Optimització Hidro-Tèrmica per addició d'una serie de subxarxes anomenats  $XT^{(i)}$  o  $XTE^{(i)}$  connectades al nus pou, tal com indica la figura 6.3. La topologia d'aquests

Taula 6.9 : Models *xh*: problemes d'Optimització Hidro-Tèrmica.

	$n$	$m$	$t$	$nel$	$\%cab$	$esp$
<b>xh48</b>	1152	289	144	3154	49.8	1.901
<b>xha48</b>	1824	433	144	4732	33.3	1.802
<b>xhs40</b>	4176	961	144	9187	15.0	1.528
<b>xh168</b>	4032	1009	504	11074	50.0	0.545
<b>xha168</b>	6384	1513	504	16612	33.3	0.516
<b>xhs50</b>	14616	3361	504	32227	15.0	0.437

$n$  : nombre d'arcs.                       $nel$  : nombre d'elements no nuls  
 $m$  : nombre de nusos.                      de les cons. a banda.  
 $t$  : nombre de cons. a banda.       $\%cab$  :  $100 \times t/m$ .  
     $esp$  :  $100 \times nel/(n \times t)$

subgrafs s'explicarà amb detall al capítol 9. Les variables del model són  $x = [x_H \ x_T]'$ , on  $x_H$  són les mateixes variables de la xarxa replicada dels models d'Optimització Hidro-Tèrmica i  $x_T$  representen els arcs de les subxarxes  $XT^{(i)}$  i  $XTE^{(i)}$ . La funció objectiu a minimitzar és quadràtica i les contriccions són tant d'igualtat com de desigualtat.

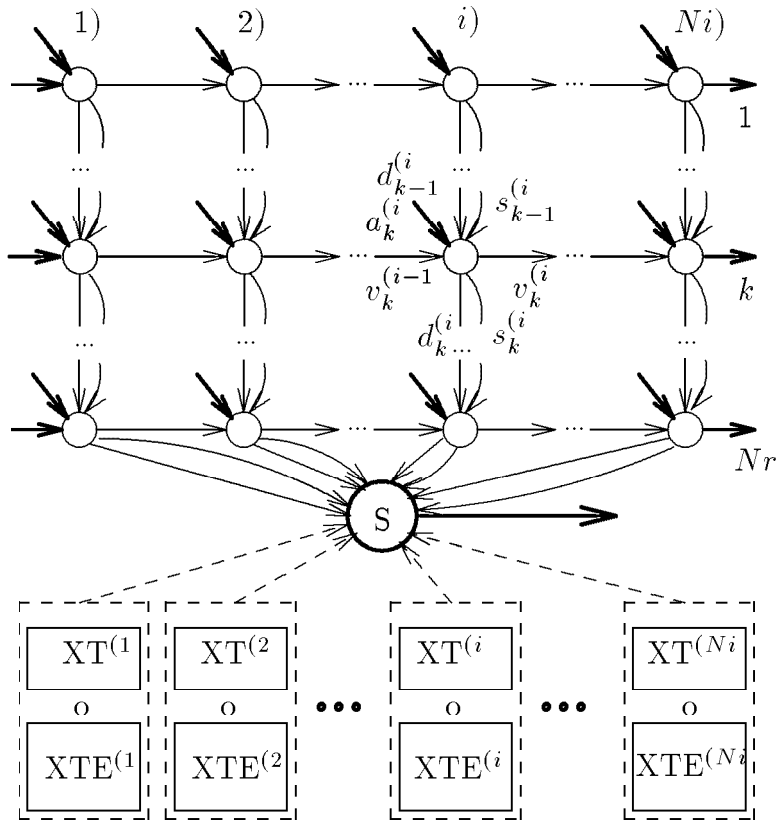


Figura 6.3 : Xarxa del models de Planificació Hidrotèrmica.

Les característiques dels models resolts es poden trobar a la taula 6.10. Dins d'aquesta taula es troba el problema *xas168*, el de major dimensió de la col·lecció EIO/UPC.

**Taula 6.10 :** Models *xa*: problemes de Planificació Hidro-Tèrmica.

	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>t</i>	<i>nel</i>	% <i>cab</i>	<i>esp</i>
<b>xa48</b>	2256	697	240	1915	34.4	0.354
<b>xa168</b>	8064	2479	840	6799	33.9	0.100
<b>xaa48</b>	4416	1345	528	4601	39.3	0.197
<b>xaa168</b>	15600	4741	1848	16193	39.0	0.056
<b>xas48</b>	6768	1873	528	6086	28.2	0.170
<b>xas168</b>	23832	6589	1848	21398	28.0	0.049

*n* : nombre d'arcs. *nel* : nombre d'elements no nuls  
*m* : nombre de nusos. de les cons. a banda.  
*t* : nombre de cons. a banda. *%cab* :  $100 \times t/m$ .  
*esp* :  $100 \times nel/(n \times t)$ .

### 6.3 Resultats Computacionals.

Aquesta secció està dedicada a la presentació i discussió dels resultats obtinguts a les proves computacionals efectuades amb la col·lecció EIO/UPC descrita a la secció 6.2. En primer lloc es presentaran els resultats generals, passant més tard a l'estudi de la influència de certes característiques dels problemes sobre el grau d'eficiència del codi NOXCB 9.0 respecte de MINOS 5.3, i finalment s'estudiarà el comportament computacional de certes variants algorísmiques descrites als capítols anteriors.

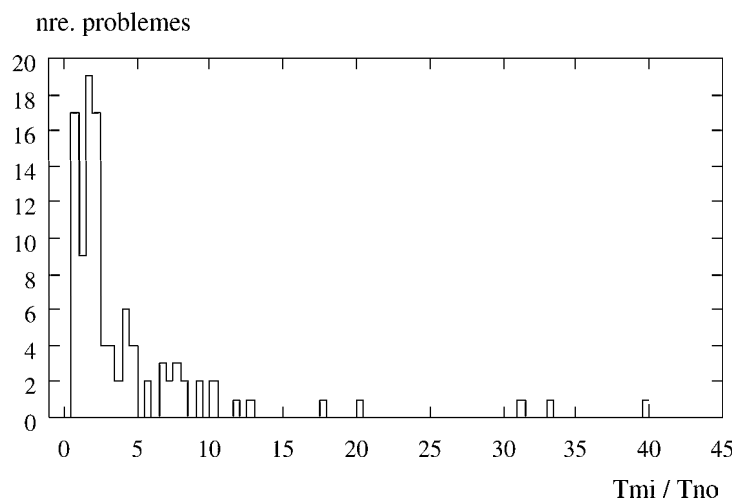
Les proves computacionals efectuades han consistit en la resolució de problemes provinents de les diferents combinacions de models DIMACS i funcions objectiu Namur i EIO1 indicades a les taules 6.7 i 6.8, més els problemes provinents de models *xh* i *xa* descrits a les taules 6.9 i 6.10. Totes les proves s'han realitzat sobre un ordinador Sun Sparc 10/41 amb un únic processador a 40MHz ( $\approx 100$ Mips,  $\approx 20$ Mflops) i 64Mb de memòria central, (32Mb reals i 32Mb mapejats a disc).

### 6.3.1 Resultats generals.

L'apèndix AP2 conté les taules amb els resultats computacionals detallats obtinguts amb NOXCB 9.0 i MINOS 5.3 pels problemes de la col·lecció EIO/UPC. Les taules incloses a l'apèndix AP3 contenen la comparació detallada del comportament dels dos paquets en allò referent al temps per iteració, distingint entre fase 1 i fase 2, temps d'execució de les fases 0+1 i 2, i, finalment, temps total d'execució. Com a índex del grau d'eficiència, tant pel que fa als temps per iteració com al temps d'execució, s'usarà la relació entre el valor proporcionat per MINOS 5.3 i NOXCB 9.0. Per exemple, si s'està comparant el temps per iteració durant la fase 1, i la columna corresponent de les taules de l'apèndix AP3 (columna  $(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$ , 1) indica 1.33, llavors  $(t/it)_{MI}/(t/it)_{NO} = 1.33$ , és a dir, el temps per iteració de MINOS 5.3 és un 33% major que el temps per iteració de NOXCB 9.0 a la fase 1. Valors superiors a 1 indiquen sempre un guany d'eficiència de NOXCB 9.0 respecte de MINOS 5.3, mentre que valors per sota de 1 corresponen a situacions on el comportament de MINOS 5.3 és millor.

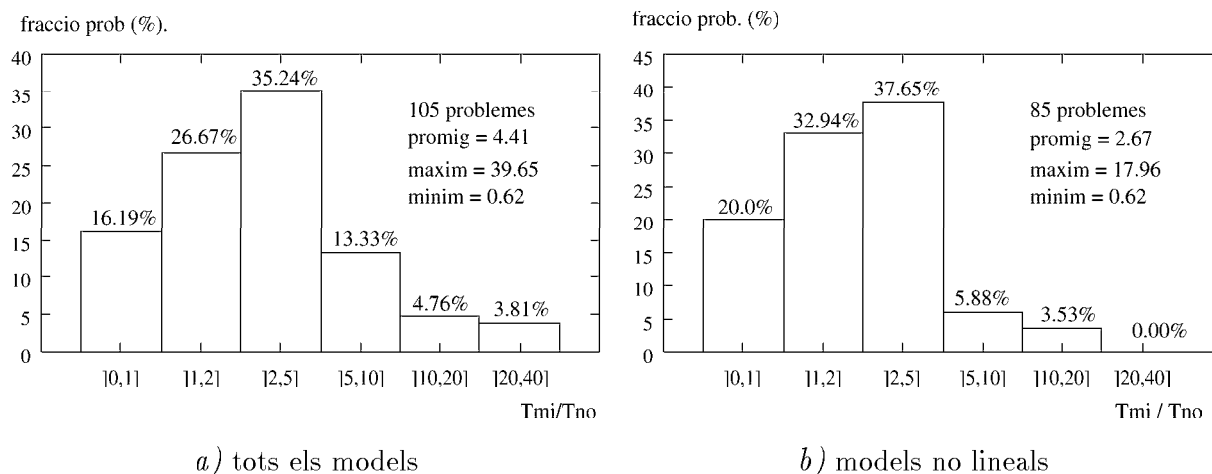
La figura 6.4 representa la distribució de les proves computacionals realitzades amb la col·lecció EIO/UPC. S'indica en abscesses el valor de la eficiència i en ordenades el nombre d'execucions amb eficiència dins del mateix interval d'amplada 0.5. S'han exclòs els problemes 10rmfb 1111, 3111 i 4111, 21gotd3121 i xas168. En el cas dels tres primers models, no ha estat possible l'obtenció de la solució amb MINOS 5.3 degut al l'elevat nombre de variables superbàsiques ( $\approx 3000$ ) d'aquests models (veure apèndix AP2). L'execució del model 21gotd3121 es va abortar per problemes de convergència de MINOS 5.3 a la fase 1. L'últim cas, el problema xas168 s'ha eliminat en constatar que les solucions obtingudes per NOXCB 9.0 i MINOS 5.3 són completament diferents.

Com es pot observar, la gran majoria d'execucions es troben localitzades dins de l'interval  $[0,10]$ , quedant-ne només un 8.57% per sobre de l'eficiència 10. Els resultats de les proves computacionals es representaran mitjançant histogrames amb intervals  $[0,1]$ ,  $[1,2]$ ,  $[2,5]$ ,  $[5,10]$  i  $[10,40]$ . Si es representa la distribució de l'eficiència del temps total d'execució s'obté l'histograma de la figura 6.5, amb un valor promig d'eficiència de 4.41. S'ha de tenir en compte que la col·lecció EIO/UPC inclou els models amb funció objectiu



**Figura 6.4 :** Representació gràfica execucions col·lecció EIO/UPC.

EIO1 tipus 20 descrita a la secció 6.2.1.6, que és lineal. Si s’eliminen les execucions amb aquesta funció objectiu, considerant només els problemes amb funció objectiu no lineal, s’obté l’histograma *b)* de la figura 6.5, amb un promig d’eficiència de 2.67. S’observa que els problemes de l’interval ]20,40] pertanyen en la seva totalitat a models lineals.



**Figura 6.5 :** Histograma eficiència NO vs. MI temps total.



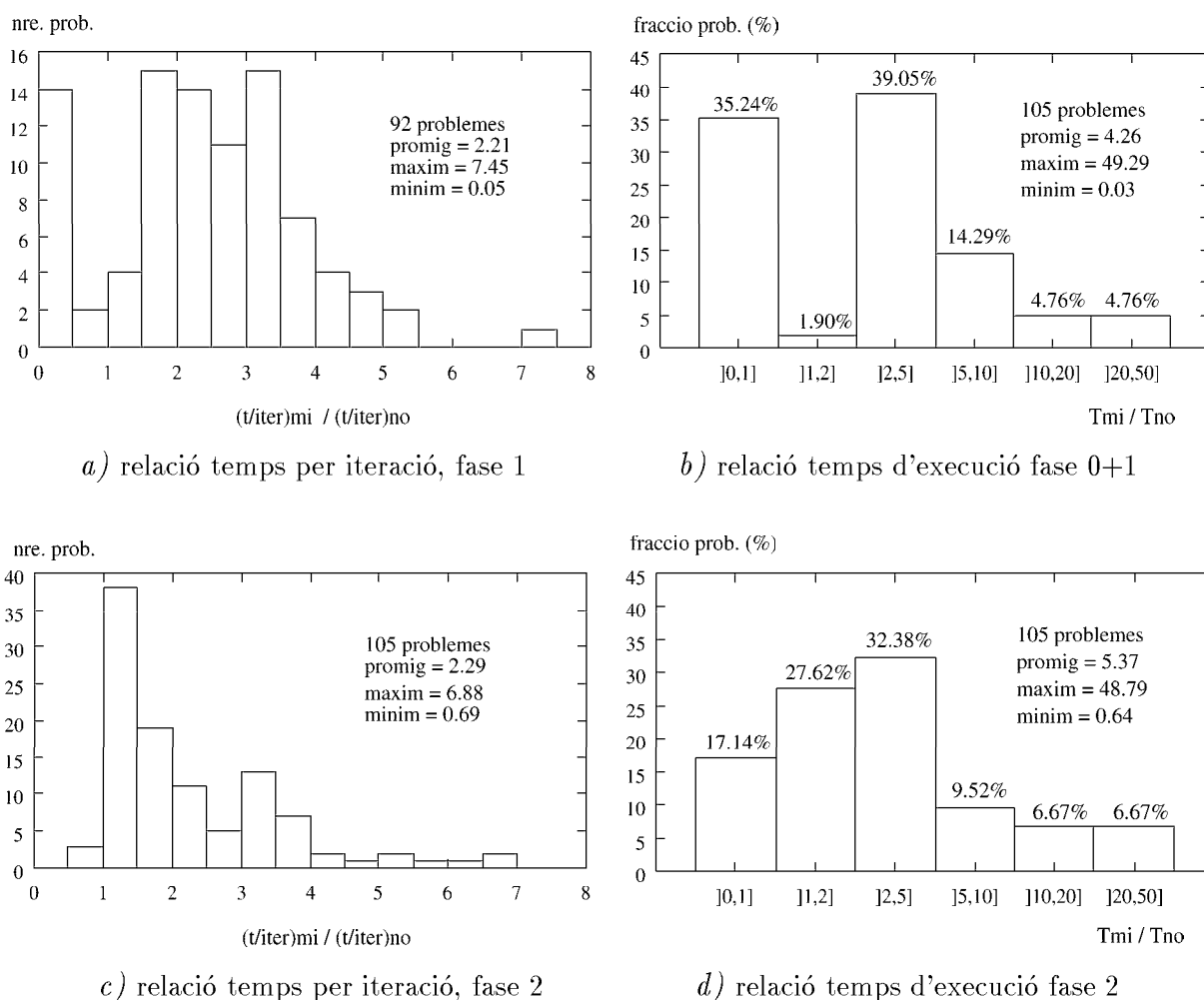
La classe  $]0,1]$  de les dues gràfiques conté 17 problemes pels quals el temps d'execució de MINOS 5.3 és inferior al temps d'execució de NOXCB 9.0. D'aquests 17 problemes, 13 corresponen a problemes *rmfa* descrits a la secció 6.2.1.2, que són els de menor dimensió de tots els models DIMACS. El valor promig de l'eficiència dels problemes d'aquesta classe és 0.82, amb una desviació estàndard de 0.1. Podem concloure doncs que :

- i)* els casos on MINOS 5.3 supera a NOXCB 9.0 corresponen majoritàriament a problemes d'escala petita.
- ii)* la reducció respecte del temps d'execució de NOXCB 9.0 és discreta ( $\approx 20\%$  en promig) en comparació amb la disminució del temps d'execució de MINOS 5.3 aconseguida per NOXCB 9.0 ( $\approx 80\%$  en promig) en els problemes on NOXCB 9.0 supera a MINOS 5.3.

### 6.3.1.1 Resultats segons fases.

Ens interessa ara comparar el comportament dels dos paquets a les dues fases de que es compona el procés d'optimització, el càlcul d'un punt inicial factible (fases 0 i 1) i l'obtenció, a partir d'aquest punt, de la solució òptima (fase 2). Les gràfiques de la figura 6.6 permeten comparar el grau d'eficiència relatiu dels dos codis tant pel que fa al temps per iteració a cada fase (gràfiques *a*) i *c*) com al temps total d'execució (gràfiques *b*) i *d*). Les gràfiques *b*) i *d*) són histogrames equivalents als de la figura 6.5. Les gràfiques *a*) i *c*) representen també histogrames, però amb la diferència que l'amplada de cada interval és constant (0.5 en tots dos casos) i que en abscisses s'indica el nombre total de problemes de cada classe (*nre. prob.*) i no el percentatge respecte del total. L'eix d'abscisses de les gràfiques *a*) i *b*) indica la relació entre el temps per iteració de MINOS 5.3 i de NOXCB 9.0 ( $(t/iter)_{no}/(t/iter)_{mi}$ ). Així doncs, un valor de  $(t/iter)_{no}/(t/iter)_{mi}=3$  indica que el temps per iteració de MINOS 5.3 és tres vegades el temps per iteració de NOXCB 9.0.

S'observa clarament que el grau d'eficiència obtingut en el temps d'execució és major que l'obtingut en el temps per iteració, tant pel que fa als valors promitjos com als valors màxims. Aquest fet indica que, a més del guany degut a l'especialització de les operacions matricials descrita al capítol 4, i que està directament relacionat amb el temps per iteració, el nombre d'iteracions que realitza el codi NOXCB 9.0 és, en general, per a les proves realitzades, inferior al que proporciona MINOS 5.3. Aquest fet pot venir provocat per la



**Figura 6.6 :** Comparació MI vs. NO fases 0+1 i fase 2

relaxació de les regles d'identificació d'òptim (5.25) usades a NOXCB 9.0, tot i que és difícil aventurar una explicació sense més informació. Tanmateix, aquesta disminució del nombre d'iteracions es produeix també a altres paquets especialitzats [12].

Observant la gràfica *a)* de la figura 6.6 es descobreix un nombre relativament alt de casos on el temps per iteració de MINOS 5.3 a la fase 1 és inferior al temps de NOXCB 9.0 (16 en total, tots problemes tipus *rmfa*), en contra del que succeeix a la fase 2, on només en tres casos el temps per iteració és favorable a MINOS 5.3 (els problemes *gged4131*, *gged4141* i *gged4122* amb funció objectiu 22). Es vol ressaltar que la gràfica *a)* representa la comparació entre el temps per iteració de la fase 1 de MINOS 5.3 i la fase 1 de NOXCB 9.0, exclouent la fase 0. Si es comparés el temps per iteració del procés de càlcul d'una solució factible de MINOS 5.3 (fase 1) i de NOXCB 9.0 (fase 0+1) el resultat seria molt més

favorable per NOXCB 9.0, doncs les iteracions de la fase 0 són les del simplex especialitzat per a fluxos purs. El resultat d'aquesta comparació es pot trobar a la figura 6.7.

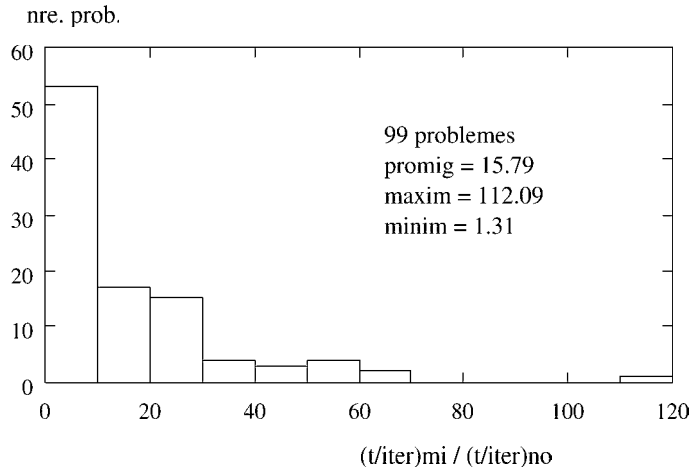


Figura 6.7 : Comparació temps per iteració fase 0+1

Pel que fa a la gràfica *b*), dels 37 problemes que formen part de la classe  $[0,1]$ , 26 són del tipus *rmfa* i 11 del tipus *rmfb*.

### 6.3.1.2 Resultats segons models i funcions objectiu.

L'estudi dels resultats computacionals fet fins ara ha estat adreçats al conjunt total de problemes que componen la col·lecció EIO/UPC, sense distingir entre els diferents models. Si separem els resultats per models i funcions objectiu s'obté la taula 6.11. Si s'analitzen els resultats per models s'observa que el grau d'eficiència més alt s'obté amb el model *gotd*. Els problemes tipus *gotd* són problemes de gran escala, amb 18000 arcs, 3000 nusos i fins a 750 constriccions a banda (veure taula 6.6). El fet més característic d'aquests problemes és l'alt grau de degeneració que presenten, que pot arribar a superar el 95% (és a dir, el 95% de les iteracions corresponen a pivotacions degenerades). En l'altre extrem d'eficiència es torna a constatar el fet que, deixant de banda els casos amb funció objectiu lineal (columna 20) els pitjors resultats s'obtenen amb el model *rmfa*, que genera els problemes de dimensió més petita. L'increment de l'eficiència de NOXCB 9.0 a mida que augmenta la dimensió del problema queda de manifest a la taula 6.12, on s'indica el valor promig, màxim i mínim de l'eficiència pels problemes EIO/UPC agrupat segons dimensions. Els problemes de dimensió petita són problemes de fins a 2256 arcs, 697 nusos i 240 constriccions a banda,

**Taula 6.11 :** Eficiència temps total segons models i f.o.

Models	$t_{MI}/t_{NO}$	Funcions objectiu					Total per models
		10	13	20	21	22	
<b>rmfa</b>	Promig	1.49		9.01		1.01	<b>3.70</b>
	Màxim	2.23		20.41		2.16	<b>20.41</b>
	Mínim	0.72		4.72		0.62	<b>0.62</b>
<b>rmfb</b>	Promig	3.12		15.92		2.97	<b>8.18</b>
	Màxim	7.25		39.65		4.97	<b>39.65</b>
	Mínim	0.92		3.11		0.95	<b>0.92</b>
<b>ggeb</b>	Promig		4.99		1.85	2.03	<b>2.96</b>
	Màxim		10.01		2.08	3.34	<b>10.01</b>
	Mínim		1.60		1.50	1.56	<b>1.50</b>
<b>gged</b>	Promig					1.68	<b>1.68</b>
	Màxim					2.44	<b>2.44</b>
	Mínim					0.84	<b>0.84</b>
<b>gotd</b>	Promig				10.43		<b>10.43</b>
	Màxim				17.96		<b>17.96</b>
	Mínim				6.56		<b>6.56</b>
<b>xh</b>	Promig						<b>4.25</b>
	Màxim						<b>12.81</b>
	Mínim						<b>1.31</b>
<b>xa</b>	Promig						<b>2.36</b>
	Màxim						<b>3.77</b>
	Mínim						<b>1.53</b>
<b>Total per funcions objectiu</b>	Promig	<b>1.87</b>	<b>4.99</b>	<b>11.78</b>	<b>4.00</b>	<b>1.81</b>	
	Màxim	<b>7.25</b>	<b>10.01</b>	<b>39.65</b>	<b>17.96</b>	<b>4.97</b>	
	Mínim	<b>0.72</b>	<b>1.60</b>	<b>3.11</b>	<b>1.50</b>	<b>0.62</b>	

els de dimensió mitjana arriben fins a 8064 arcs, 2479 nusos i 840 constriccions a banda. Finalment, l'exemple major dels problemes de dimensió gran té 18000 arcs, 3000 nusos i 750 constriccions a banda

**Taula 6.12 :** Eficiència temps total d'execució segons la dimensió del problema. S'han exclós les execucions amb funció objectiu lineal.

Dimensió	Problemes	$t_{MI}/t_{NO}$		
		Promig	Màxim	Mínim
Gran	gged, gotd, xhs50, xaa168, xas168	5.10	17.96	0.84
Mitjana	rmfb, ggeb, xhs40, xh168, xaa48, xas48	2.87	10.00	0.92
Petita	rmfa, xh48, xha48, xa48	1.34	2.47	0.62

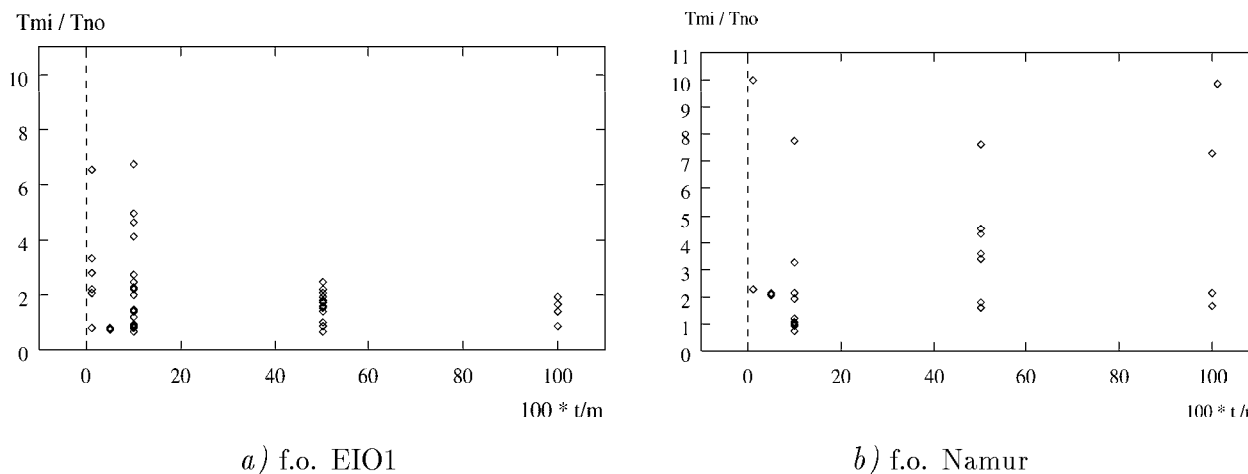
### 6.3.2 Característiques del problema i eficiència.

Un dels propòsits de l'elaboració de la col·lecció de problemes EIO/UPC va ésser l'estudi de l'impacte de certes característiques dels problemes (**FNCL**) sobre el grau d'eficiència de l'algorisme implementat a NOXCB 9.0. Al llarg d'aquesta secció es presentaran els resultats obtinguts en fer aquest estudi, del qual s'han exclòs les execucions amb funció objectiu lineal EIO1 20. La raó d'aquesta exclusió és que dites execucions pertorben significativament l'estudi, doncs proporcionen graus d'eficiència molt per sobre de la resta de problemes. Donat que l'interés central d'aquest estudi és l'avaluació del comportament del codi desenvolupat sobre problemes no lineals, s'ha considerat que per tal de fer una comparació honesta amb MINOS 5.3 s'havien de segregar aquestes execucions.

#### 6.3.2.1 Nombre de constriccions a banda.

Una de les assumpcions inicials que justifiquen el disseny especialitzat de l'algorisme A3.1 per a problemes (**FNCL**) és que el nombre de constriccions a banda és petit en comparació amb el nombre d'equacions de xarxa. El manual del paquet NETSIDE [52] diu explícitament que s'aconseguiran millores respecte de codis de propòsit general si la relació  $t/m$  és, com a màxim, d'un 10%. Una part de les proves computacionals realitzades han tingut com a objectiu comprovar aquesta afirmació, i això es va tenir en compte en el disseny de la col·lecció EIO/UPC. Els models DIMACS d'aquesta col·lecció contenen problemes amb una relació  $t/m$  que va d'un 1% fins a un 100%, agrupats en classes de  $t/m \in \{1\%, 5\%, 10\%, 50\%, 100\%\}$ . Les gràfiques de la figura 6.8 representen el valor de l'eficiència  $t_{MI}/t_{NO}$  en funció de la relació  $t/m$ , expressada en tant per cent. S'observa un comportament diferenciat segons es tracti de models DIMACS resolts amb funcions objectiu EIO1 (gràfica *a*), exclosa sempre la funció objectiu lineal EIO1 20, o amb funcions objectiu Namur (gràfica *b*).

Si s'analitza la gràfica 6.8 *a*) s'observa una degradació de l'eficiència a mida que augmenta la relació  $t/m$ . Si es calcula el valor promig de l'eficiència pels problemes DIMACS amb funció objectiu EIO1 21 i 22 amb un valor  $t/m$  per sota de 10% i es compara amb el mateix valor calculat pels problemes amb  $t/m$  per sobre de 50% s'obté, pel primer cas, un



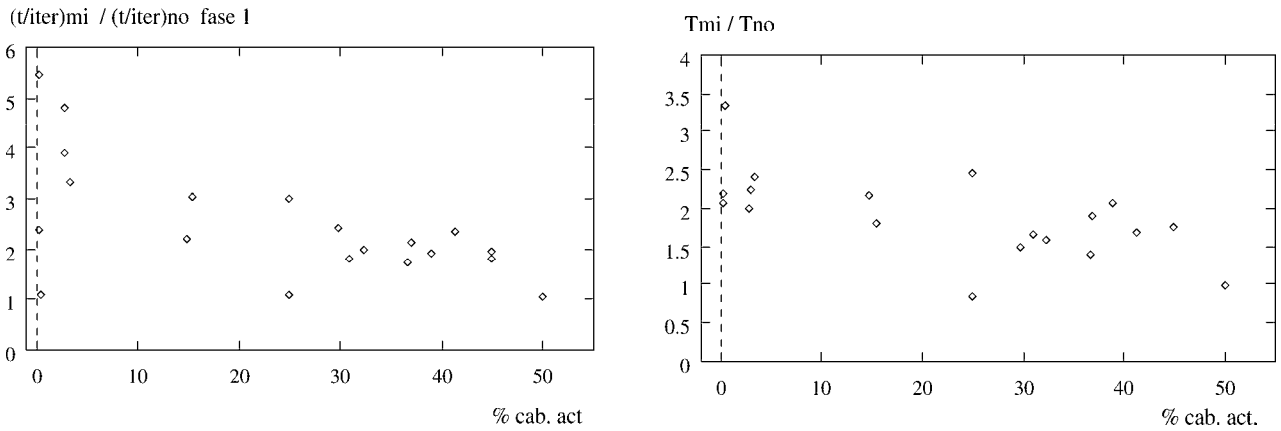
**Figura 6.8 :** Relació de l'eficiència amb la fracció de constriccions a banda  $100 \times t/m$ .

valor promig de 2.39 amb desviació estàndard de 1.8, mentre que en el segon cas s'obté una eficiència promig de 1.63 amb desviació estàndard de 0.47. Aquest comportament no és extrapolable als casos amb funció objectiu Namur, representats a la gràfica *b)* de la figura 6.8. L'alt grau de dispersió d'aquesta taula no permet extreure cap conclusió.

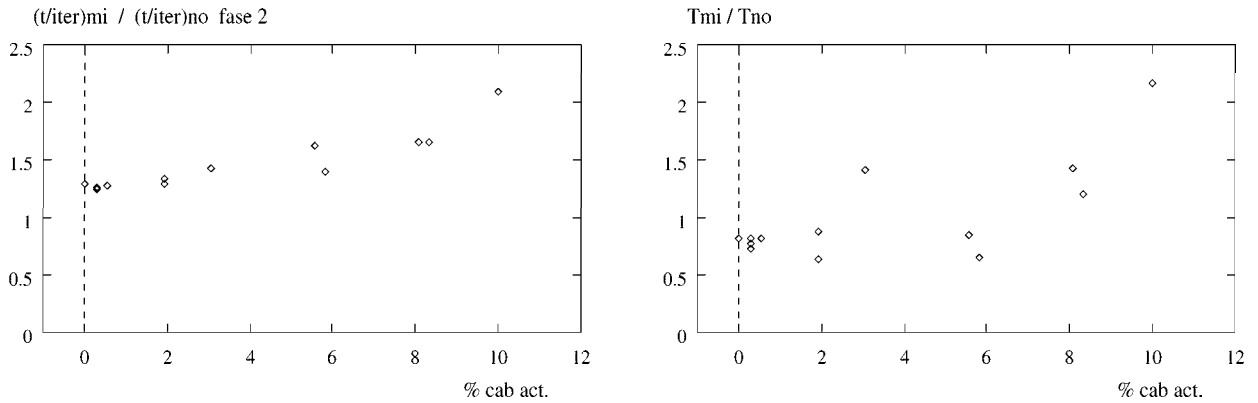
Com a conclusió podem indicar que la fracció  $t/m$  condiciona el grau d'eficiència del codi especialitzat NOXCB 9.0 per problemes que, com els executats amb funció objectiu EIO1, presenten un nombre reduït de variables superbàsiques, mentre que no afecta a l'eficiència de problemes amb un nombre de superbàsiques elevat, com correspon als problemes executats amb funció objectiu Namur. Aquest fet, és a dir, que valors alts de la relació  $t/m$  no impliquen necessàriament una pèrdua significativa de l'eficiència, ho corrobora el fet que el valor promig de l'eficiència total  $t_{MI}/t_{NO}$  pels problemes amb  $t/m = 100\%$  és de 2.79, és a dir, NOXCB 9.0 és prop de tres vegades més ràpid que MINOS 5.3, eficiència perfectament equiparable a l'eficiència promig de tots els problemes EIO/UPC no lineals, de valor 2.67.

### 6.3.2.2 Nombre de constriccions a banda actives a l'òptim.

El nombre de constriccions a banda actives  $c_x$  determina, en certa forma, la diferència entre el problema (FNCL) i el problema associat de fluxos purs. Les iteracions de l'algorisme A3.1 especialitzat pel problema (FNCL) efectuades amb  $c_x^k = 0$  treballen



a) resultats problemes 21 i 22 ggeb



b) resultats problemes 22 rmfa

**Figura 6.9 :** Relació de l'eficiència amb  $\%c_x^*$ .

amb una base de treball  $Q^k = \mathbf{I}$ , el que fa que les operacions que involucren  $Q^{-1}$  es simplifiquen notablement, tot i que les matrius eta d'actualització de  $Q^{-1}$  poden ser matrius eta qualssevol. Tot això indueix a pensar que l'eficiència del codi NOXCB 9.0 hauria de dependre en certa mesura del valor pres per  $c_x^k$  al llarg de les iteracions. Tanmateix, això no sempre és així, segons indica l'evidència computacional proporcionada per l'estudi de la variació de l'eficiència en funció del nombre de constriccions a banda actives a l'òptim  $c_x^*$ . La sèrie de problemes 21ggeb i 22ggeb, exclosos els problemes ggeb4221 i ggeb4321, proporcionen un conjunt relativament nombrós d'execucions de problemes amb característiques força similars ( $1.57 \leq s^* \leq 2.6$ ,  $esp = 0.1\%$ ). La representació gràfica d'aquestes proves (gràfica a), figura 6.9) mostra un clar empitjorament de l'eficiència per iteració a la fase 1 ( $(t/iter)mi / (t/iter)no fase 1$  a la gràfica), així com una certa disminució de l'eficiència total ( $Tmi / Tno$ ) a mida que augmenta el valor del  $c_x^*$  ( $\% cab. act.$ , gràfica

b)). S'ha constatat que aquests resultats són només parcialment extrapolables a la resta de casos, doncs si és cert que en general l'eficiència per iteració a la fase 1 disminueix, tant l'eficiència total com l'eficiència per iteració a la fase 2 poden augmentar. Aquest efecte s'observa en els problemes 22rmfa (gràfica *b*), figura 6.9). En general, l'estudi, tant d'aquests dos casos com els de la resta de problemes DIMACS, indica que, a mida que  $c_x^*$  augmenta, es produeix un empitjorament bastant clar de l'eficiència per iteració a la fase 1 i, en menor grau, a la fase 2. La degradació de l'eficiència total  $t_{MI}/t_{NO}$  és força dubtosa i depèn de les altres característiques del model.

### 6.3.2.3 Estructura de les constriccions a banda.

L'impacte de l'estructura de les constriccions a banda sobre l'eficiència del codi NOXCB 9.0 s'ha estudiat mitjançant la inclusió a la col·lecció EIO/UPC de problemes amb constriccions a banda amb diferent grau d'esparsitat i amb diferents valors  $t_{ij}^{max} = \max_{\forall i,j} \{t_{ij}\}$  i  $t_{ij}^{min} = \min_{\forall i,j} \{t_{ij}\}$ , sent  $t_{ij}$  l'element  $(i,j)$  de la matriu de constriccions a banda  $T$ . En aquest segon cas, la major part dels problemes s'han generat amb  $t_{ij}^{max} = 1$  i  $t_{ij}^{min} = 0.1$ , mentre que un conjunt reduït s'ha executat amb valors de  $t_{ij}^{max}$  majors ( $10^5, 10^6, 100$ ), conservant el mateix valor de  $t_{ij}^{min}$ . La relació entre eficiència i el valor de  $t_{ij}^{max}$  s'indica a la taula 6.13, on es comparen els promitjos de l'eficiència total entre els problemes amb  $t_{ij}^{max}$  alt i els promitjos de la resta de problemes pertanyents al mateix model.

**Taula 6.13 :** Eficiència en funció del valor dels elements de les constriccions a banda.

model	Promig $t_{ij}^{max}$ alt	Promig model	# casos/total
rmfa	3.17	3.84	8/30
rmfb	3.94	8.65	2/18
ggeb	3.80	2.8	3/24
gged	0.84	1.85	1/5

Els problemes reals de fluxos amb constriccions a banda acostumen a presentar un grau d'esparsitat molt alt. Per exemple, en els problemes *xh*, la relació  $nel/(n \times t)$ , que anomenarem *densitat* oscil·la entre un 1.9% i un 0.44%, mentre que pels problemes *xa* oscil·la entre un 0.05% i 0.36%. A part, l'esparsitat també acostuma a augmentar amb la dimensió del problema. Per exemple, les matrius esparses de la col·lecció de Duff et al.



[28, 29] presenten una densitat de entre 0.1% per les més petites, fins a  $7.7 \times 10^{-4}\%$  per les més grans. Tanmateix hom ha inclòs a la col·lecció EIO/UPC problemes amb una densitat molt alta, de fins al 10%. Els valors promitjos de l'eficiència total per a diferents valors de densitat es mostren a la taula 6.14. Els resultats fins a un valor de la densitat fins a  $\approx 5\%$  no deixen entreveure una relació clara entre aquest factor i l'eficiència total. La baixa eficiència associada als casos amb densitat 10% tampoc és concloent degut al reduït nombre de casos executats.

**Taula 6.14 :** Eficiència en funció de l'esparsitat de les constriccions a banda.

$100 \times nel/(n \times t)$	Promig	# casos
$\leq 0.1$	3.24	30
$\approx 1.$	2.32	45
$\approx 5.$	2.89	8
$\approx 10.$	1.17	2

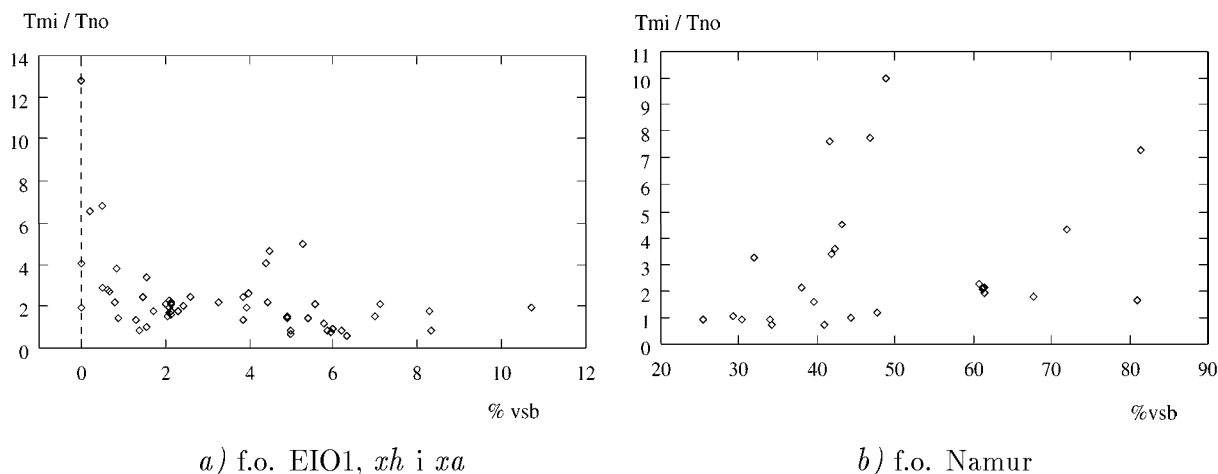
### 6.3.2.4 Nombre de superbàsiques.

El nombre de variables superbàsiques a la iteració  $k$ -èssima,  $s^k$ , determina gran part del cost computacional de les iteracions a la fase 2, doncs tant el nombre de columnes de la matriu  $Z$  com la dimensió dels factors de Cholesky de l'aproximació quasi-Newton coincideixen amb el nombre de superbàsiques. Té interès, doncs, determinar fins a quin punt aquest paràmetre afecta a l'eficiència del codi NOXCB 9.0. Hom adoptarà com a indicador de la rellevància del nombre de superbàsiques la fracció :

$$\%s^* = 100 \times s^*/(n - m - t)$$

és a dir, la fracció, en tant per cent, que representa el nombre de superbàsiques a l'òptim respecte de les variables fora de la base. Segons aixó,  $\%s^* = 0$  indica que no hi ha cap variable superbàsica a la solució mentre que  $\%s^* = 100$  correspondria a una solució sense variables no bàsiques. Per tal de justificar les conclusions d'aquest apartat s'ha representat a les dues gràfiques de la figura 6.10 l'eficiència total  $t_{MI}/t_{NO}$  en funció de la fracció  $\%s^*$ , indicada amb  $\%vsb$ . La gràfica *a*) correspon als resultats amb les funcions objectiu EIO1, exclosa com sempre la funció lineal 20, més els models de coordinació *xa* i *xh*. La gràfica *b*) presenta els mateixos resultats per les funcions Namur. Novament s'observa un

comportament clarament diferenciat en tots dos grups. En el primer (funcions EIO1 més  $xh$  i  $xa$ ) l'eficiència exhibeix una certa tendència decreixent a mida que augmenta el valor de  $\%s^*$ , mentre que en el segon cas, (funcions Namur), tot i la dispersió dels resultats, es pot aventurar una certa tendència creixent. La interpretació d'aquests resultats ha de tenir en compte que entre les execucions de la gràfica *a*) i els de la gràfica *b*) hi ha una diferència qualitativa important consistent en la diferent estratègia de càlcul de les direccions de descens. A la secció 5.2.2.3 ja s'ha discutit i justificat l'estratègia implementada a NOXCB 9.0, consistent en l'ús de l'aproximació quasi-Newton mentre el nombre de superbàsiques sigui inferior o igual a 500 i el pas a Newton Truncat quan es superi aquest valor. MINOS 5.3, per la seva banda, usa sempre l'aproximació quasi-Newton, quedant penalitzat d'aquesta forma quan s'executa amb funcions objeiu Namur, doncs aquestes presenten un valor de  $s^*$  entre 286 i 3352. De fet, els problemes amb valor de  $s^*$  més elevat no van poder ésser resolts amb MINOS 5.3, tal com s'indica a l'apèndix AP2 .



**Figura 6.10 :** Relació de l'eficiència amb la fracció de variables superbàsiques a l'òptim.

Finalment es comparen els valors promitjos de l'eficiència a la fase 2 dels diferents models executats, amb menció explícita del valor de  $\%s^*$ . Els resultats d'aquesta comparació es presenten a la taula 6.15, on la primera columna indica el valor de  $\%s^*$ , la segona el promig de l'eficiència del temps per iteració a la fase 2 i la tercera l'eficiència del temps d'execució de la fase 2. S'observa que el grau d'eficiència de NOXCB 9.0 respecte de MINOS 5.3 és força major pels models amb un elevat nombre de variables superbàsiques que amb els models amb un valor de  $\%s^*$  reduït.

Taula 6.15 : Eficiència en funció de %s\*.

	Promig %s*	Promig $(t_2/it_2)_{\frac{MI}{NO}}$	Promig $t_{2MI}/t_{2NO}$
<b>10rmfa</b>	52.36	1.71	1.48
<b>22rmfa</b>	5.70	1.45	0.98
<b>10rmfb</b>	43.29	2.90	3.08
<b>22rmfb</b>	2.88	1.99	2.79
<b>13ggeb</b>	46.02	4.42	5.00
<b>21ggeb</b>	3.48	1.61	1.78
<b>22ggeb</b>	3.06	1.64	1.96

### 6.3.3 Variants algorísmiques i eficiència.

L'objectiu d'aquesta secció és estudiar la influència de certes variants algorísmiques en el comportament del codi NOXCB 9.0. Les proves computacionals s'han realitzat sobre un conjunt de 10 problemes de la col·lecció EIO/UPC, que anomenarem EIO/UPC10. La composició i característiques d'aquests problemes s'indiquen a la taula 6.16. Per comoditat ens referirem als problemes de la col·lecció EIO/UPC10 amb l'identificador  $P_i$  que apareix a la primera columna de la taula 6.16. L'avaluació del comportament de les diferents variants algorísmiques s'ha realitzat mitjançant dos tipus de taules. La primera indica la relació entre els temps per iteració i els temps d'execució proporcionats per la variant algorísmica estudiada i per l'execució "base", que correspon a les opcions per defecte descrites a la secció 6.1.3. El segon tipus de taula conté dues files per cada problema. La primera, indicada amb NO1 correspon a l'execució base i la segona, indicada amb NO2, correspon a la variant algorísmica estudiada. Les columnes d'aquesta taula contindran la següent informació :

- nombre d'iteracions el temps d'execució de les fases 1 i 2 ( la fase 0 no es veu afectada per les proves realitzades), així com el temps d'execució total.
- $piv\%$ : la fracció que representa el nombre d'iteracions on s'ha efectuat pivotació (passa **[3.5]** de l'algorisme A3.1) respecte del nombre total d'iteracions, a la fase 1 i 2. Aquest paràmetre és un indicador del pes del procés de minimització al subespai nul de les constriccions actives, de forma que quan més alt sigui  $piv\%$ , menys important és

Taula 6.16 : Problemes col·lecció EIO/UPC10.

		$n$	$m$	$t$	$nel$	$\%cab$	$esp$	$\%c_x^*$	$\%s^*$
$P_1$	10 rmfa2111	1524	360	18	18	5.0	0.066	0.56	61.7
$P_2$	22 rmfa3241	1524	360	36	538	10.0	0.981	10.00	4.43
$P_3$	22 rmfb3132	5420	1200	120	138	10.0	0.021	1.25	6.00
$P_4$	10 rmfb5111	5420	1200	1200	1338	100.0	0.021	0.50	79.00
$P_5$	21 ggeb3121	4008	501	50	198	10.0	0.099	2.79	2.43
$P_6$	13 ggeb4141	4008	501	251	1013	50.1	0.101	47.11	41.89
$P_7$	22 gged3121	12008	1501	150	1834	10.0	0.100	2.86	2.10
$P_8$	21 gotd2121	18000	3000	300	5390	10.0	0.100	7.10	0.54
$P_9$	11 xha168	6384	1513	504	16612	33.3	0.516	0.00	3.85
$P_{10}$	12 xaa168	15600	4741	1848	16193	39.0	0.056	32.67	3.92

aquest procés. El cas extrem correspondria a un problema amb funció objectiu lineal, que tindria  $piv\% = 100$ .

- $deg\%$ : la fracció que representa el nombre d'iteracions on s'ha efectuat una pivotació degenerada ( $\bar{\alpha} = 0$ ) respecte dels nombre total de pivotacions, a la fase 1 i 2.
- $rein\%$ : relació, en tant per cent, entre el nombre d'iteracions on s'ha efectuat una inicialització de la reinversió (factorització) de la base de treball.
- $f(x)/iter$ : nombre d'avaluacions de la funció objectiu per iteració.
- $MNT$ : nombre d'iteracions on s'ha calculat la direcció de descens amb el mètode de Newton Truncat.
- $GC$ : nombre total d'iteracions de l'algorisme del Gradient Conjugat A5.3 usat durant l'aplicació del MNT.
- $MQN$ : nombre d'iteracions on s'ha aplicat el mètode quasi-Newton de càlcul de la direcció de descens.

### 6.3.3.1 Exploració lineal de Bertsekas.

Les taules 6.17 i 6.18 mostren, per a cadascun dels problemes de la col·lecció EIO/-UPC10 els resultats obtinguts amb l'execució "base" i amb exploració lineal de Bertsekas, seguint l'esquema de l'algorisme A5.2 amb  $\alpha^1 = 1$ ,  $\mu_{ELB} = 0.1$  i  $\epsilon_{QA} = 10^{-10}$ . La taula 6.17 indica la relació entre els temps per iteració i també entre els temps d'execució. S'observa

una degradació general de l'eficiència, que és especialment important als casos  $P_1$ ,  $P_5$ ,  $P_8$  i, en menor grau,  $P_{10}$ . Si ens fixem en la segona columna de la taula 6.17 observarem per aquests quatre casos un fort increment en el temps per iteració a la fase 2 i un increment, encara major, en el temps total d'execució de la fase 2. El fet que els increments del temps per iteració i el temps total no siguin proporcionals indica que el nombre d'iteracions a la fase 2 també ha hagut d'augmentar, com es confirma si observem la columna d'iteracions a la fase 2 de la taula 6.18. L'estudi d'aquesta taula revela els següents aspectes :

**Taula 6.17 :** Eficiència de l'exploració lineal de Bertsekas. NO1 indica execució base. NO2 indica expl. lineal de Bertsekas.

	$(t/it)_{\frac{NO2}{NO1}}$		$t_{NO2}/t_{NO1}$		
	f.1	f.2	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	0.50	2.31	0.50	5.37	<b>5.35</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	1.05	1.21	1.05	1.43	<b>1.38</b>
<b>P<sub>3</sub></b>	1.00	1.03	1.00	1.13	<b>1.12</b>
<b>P<sub>4</sub></b>	1.09	1.07	1.09	1.39	<b>1.39</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	0.94	2.33	0.94	21.25	<b>20.26</b>
<b>P<sub>6</sub></b>	1.01	0.98	1.01	1.20	<b>1.20</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	0.99	1.61	0.99	2.20	<b>2.14</b>
<b>P<sub>8</sub></b>	1.01	3.14	1.01	8.74	<b>8.07</b>
<b>P<sub>9</sub></b>	1.03	1.08	1.03	1.12	<b>1.12</b>
<b>P<sub>10</sub></b>	0.99	1.16	0.99	2.46	<b>2.26</b>

- i)* Amb l'exploració lineal de Bertsekas es produeix un increment del nombre d'iteracions a la fase 2.
- ii)* L'increment de iteracions a la fase 2 correspon a un major nombre d'iteracions de minimització al subespai nul  $(SNM)^k$  (passes **3.1** a **3.4** de l'algorisme A3.1). Aquest fet es dedueix de la disminució del valor de  $piv\%$ , que indica la fracció d'iteracions amb pivotació.
- iii)* Finalment, els casos  $P_5$  i  $P_8$  presenten un increment significatiu del nombre d'avaluacions de la funció objectiu per iteració,

Els resultats obtinguts desaconsellen l'ús de la implementació de l'algorisme A5.2 quan es treballa amb NOXCB 9.0. S'ha de fer notar que la discrepància en el temps per iteració

**Taula 6.18 :** Resultats amb exploració lineal de Bertsekas.

		Iteracions		piv	deg	rein	$f(x)/$	Iteracions			Temps d'execució		
		f.1	f.2	%	%	%	iter	MNT	GC	MQN	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	NO1	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	160.1	160.7
	NO2	1	6076	3	1	0.02	3.28	207	4347	5891	0.1	859.8	860.2
<b>P<sub>2</sub></b>	NO1	657	1731	70	61	1.01	0.87	0	0	1730	1.7	14.0	16.1
	NO2	657	2054	62	54	0.89	1.13	0	0	2054	1.8	20.1	22.2
<b>P<sub>3</sub></b>	NO1	74	2186	41	35	0.18	1.26	0	0	2185	0.5	81.4	83.0
	NO2	74	2391	39	33	0.16	1.34	0	0	2390	0.5	92.0	93.3
<b>P<sub>4</sub></b>	NO1	80	7372	21	18	0.28	9.74	2661	55881	4705	3.4	2529.0	2533.0
	NO2	80	9610	16	13	0.21	8.18	2666	55986	6978	3.8	3516.4	3520.8
<b>P<sub>5</sub></b>	NO1	170	1958	68	36	1.50	0.98	0	0	1899	0.6	32.4	34.0
	NO2	170	17885	7	3	0.16	2.65	0	0	19451	0.6	687.4	688.7
<b>P<sub>6</sub></b>	NO1	1242	6062	32	11	0.85	6.03	1981	24210	4085	10.6	861.4	873.0
	NO2	1242	7431	27	9	0.71	5.03	1728	21584	5717	10.8	1033.4	1045.0
<b>P<sub>7</sub></b>	NO1	1511	8549	88	44	2.00	0.68	0	0	8065	16.8	366.4	387.1
	NO2	1511	11660	67	33	1.52	1.23	0	0	11285	16.6	806.5	827.0
<b>P<sub>8</sub></b>	NO1	7560	33182	89	78	0.91	0.33	0	0	32312	153.1	1655.3	1811.3
	NO2	7560	92439	38	33	0.41	1.96	0	0	101399	155.0	14464.1	14622.1
<b>P<sub>9</sub></b>	NO1	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	0.6	197.3	202.7
	NO2	1	2693	79	2	0.04	1.19	0	0	2809	0.6	221.1	227.2
<b>P<sub>10</sub></b>	NO1	4741	9768	80	0	1.47	1.20	0	0	9755	292.1	1874.9	2184.7
	NO2	4741	20726	46	0	0.87	1.83	0	0	21327	290.4	4621.2	4928.6

NO1 indica execució base. NO2 indica expl. lineal de Bertsekas.

a la fase 1 que s'observa a la taula 6.17 en el cas  $P_1$  és degut al fet que només es realitza una iteració a la fase 1, el qual fa que les estadístiques en aquest cas no siguin fiables.

### 6.3.3.2 Control del bloqueig.

En aquest cas s'han executat els problemes EIO/UPC10 amb el control de bloqueig descrit a la secció 5.3.2. L'activació d'aquest control hauria de disminuir el nombre de iteracions degenerades, doncs elimina part de les situacions que les provoquen, a costa d'un increment del cost computacional, doncs caldrà calcular, a cada iteració on es taxin les variables no bàsiques, tants cicles addicionals com variables no bàsiques candidates a entrar a  $\mathcal{S}$  siguin descartades. Els experiments computacional indiquen que, en general, aquests dos fenòmens es compensen mutuament, provocant uns temps totals d'execució lleugerament majors pels problemes de dimensió petita i mitjana ( $P_1$  a  $P_5$  i  $P_9$ ) i aconseguint-se un discret guany d'eficiència en els models de dimensió gran ( $P_7$ ,  $P_8$  i  $P_{10}$ ). De l'anàlisi de les taules 6.19 i 6.20 es poden extreure les següents conclusions :

- i)* Hi ha un clar increment del temps per iteració a les dues fases (columnes 1 i 2 de 6.20).
- ii)* Es produeix una disminució clara del nombre d'iteracions, tant a la fase 1 com a la fase 2, segons s'observa a la taula 6.19.
- iii)* Aquesta reducció del nombre d'iteracions, tot i arribar a ser notable en alguns casos, no es reflecteix en una reducció equivalent del temps d'execució, degut a l'increment del temps per iteració mencionat anteriorment. Aquest fenomen és especialment clar en els casos  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_8$ . Els problemes  $P_2$  i  $P_8$  presenten una fracció d'iteracions degenerades especialment alt (61% i 70% respectivament)
- iv)* Com era d'esperar, es produeix una disminució del nombre d'iteracions degenerades, especialment en els casos de major grau de degeneració.

**Taula 6.19 :** Resultats amb control de bloqueig.

		Iteracions		piv %	deg %	rein %	$f(x)/$ iter	Iteracions			Temps d'execució		
		f.1	f.2					MNT	GC	MQN	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	NO1	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	160.1	160.7
	NO2	1	2550	7	2	0.04	3.83	211	4431	2338	0.1	166.3	166.9
<b>P<sub>2</sub></b>	NO1	657	1731	70	61	1.01	0.87	0	0	1730	1.7	14.0	16.1
	NO2	386	1357	52	38	0.92	1.31	0	0	1356	1.9	15.4	17.9
<b>P<sub>3</sub></b>	NO1	74	2186	41	35	0.18	1.26	0	0	2185	0.5	81.4	83.0
	NO2	22	1940	36	27	0.15	1.36	0	0	1939	0.3	88.2	89.7
<b>P<sub>4</sub></b>	NO1	80	7372	21	18	0.28	9.74	2661	55881	4705	3.4	2529.0	2533.0
	NO2	68	7400	19	15	0.28	10.30	2695	56595	4891	5.4	2818.4	2824.6
<b>P<sub>5</sub></b>	NO1	170	1958	68	36	1.50	0.98	0	0	1899	0.6	32.4	34.0
	NO2	110	1870	55	21	0.81	1.24	0	0	1849	0.8	41.6	43.3
<b>P<sub>6</sub></b>	NO1	1242	6062	32	11	0.85	6.03	1981	24210	4085	10.6	861.4	873.0
	NO2	1158	5745	35	13	0.94	5.65	1593	21338	4154	11.7	783.3	796.1
<b>P<sub>7</sub></b>	NO1	1511	8549	88	44	2.00	0.68	0	0	8065	16.8	366.4	387.1
	NO2	1249	8187	77	27	2.07	0.97	0	0	7815	22.8	484.2	510.9
<b>P<sub>8</sub></b>	NO1	7560	33182	89	78	0.91	0.33	0	0	32312	153.1	1655.3	1811.3
	NO2	3671	15633	79	61	1.20	0.62	0	0	15095	117.7	1534.0	1655.4
<b>P<sub>9</sub></b>	NO1	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	0.6	197.3	202.7
	NO2	1	2560	82	2	0.04	1.10	0	0	2559	0.6	206.8	212.2
<b>P<sub>10</sub></b>	NO1	4741	9768	80	0	1.47	1.20	0	0	9755	292.1	1874.9	2184.7
	NO2	4724	9841	82	0	1.57	1.16	0	0	9683	292.3	1837.7	2146.3

NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb control de bloqueig.

**Taula 6.20 :** Eficiència del control de bloqueig. NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb control de bloqueig.

	$(t/it)_{\frac{NO2}{NO1}}$		$t_{NO2}/t_{NO1}$		
	f.1	f.2	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	0.80	1.06	0.80	1.04	<b>1.04</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	1.86	1.40	1.09	1.10	<b>1.11</b>
<b>P<sub>3</sub></b>	1.90	1.22	0.57	1.08	<b>1.08</b>
<b>P<sub>4</sub></b>	1.86	1.11	1.58	1.11	<b>1.12</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	2.12	1.35	1.37	1.29	<b>1.27</b>
<b>P<sub>6</sub></b>	1.18	0.96	1.10	0.91	<b>0.91</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	1.64	1.38	1.36	1.32	<b>1.32</b>
<b>P<sub>8</sub></b>	1.58	1.97	0.77	0.93	<b>0.91</b>
<b>P<sub>9</sub></b>	1.05	1.06	1.05	1.05	<b>1.05</b>
<b>P<sub>10</sub></b>	1.00	0.97	1.00	0.98	<b>0.98</b>

### 6.3.3.3 Cicles no clau i superbàsics.

La següent prova computacional pretén avaluar l'impacte de l'ús explícit dels conjunts de cicles no clau  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i superbàsics  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ . Tal com s'indica a la secció 6.1.3, l'execució base s'ha realitzat amb el conjunt d'algorismes A4.6, A4.8, A4.10, A4.12, A4.14 i A4.17. L'execució que es compararà s'ha obtingut amb els algorismes A4.9, A4.11, A4.13, A4.15 i A4.19. Els resultats s'indiquen a les taules 6.21 i 6.22 podent-se fer les següents consideracions :

- i)* Els models  $P_1$ ,  $P_4$  i  $P_6$  corresponents a funcions objectiu Namur experimenten un empitjorament clar del temps d'execució total quan s'exploten les estructures  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ , amb increments del 12%, 62% i 25% respectivament. Aquest increment és conseqüència d'un increment del mateix ordre dels temps per iteració a la fase 2, mentre que el temps per iteració a la fase 1 roman pràcticament constant (tret del cas  $P_1$ , per les raons que ja s'han comentat anteriorment). La característica que distingeix a aquests casos de la resta de problemes EIO/UPC10 és l'elevat nombre de variables superbàsiques a la solució, Així doncs no sembla indicat l'ús explícit de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  en aquesta situació.
- ii)* Tot i que, des d'un punt de vista purament algorímic, l'ús o no de les estructures  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$  i  $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$  no hauria d'afectar al nombre d'iteracions, s'observa un increment del nombre d'iteracions dels models  $P_4$  a  $P_{10}$  (mitjans i grans) mentre que en els models  $P_{1,2}$  es redueixi a  $P_3$  roman pràcticament igual. En alguns casos, aquesta variació del nombre



d'iteracions es compensa amb una variació oposada del temps per iteració, de forma que el temps total sigui practicamente el mateix (per exemple, casos  $P_2$  i  $P_8$ ). Aquesta discrepància pot ser deguda

**Taula 6.21 :** Eficiència de l'ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ . NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ .

	$(t/it)_{\frac{NO2}{NO1}}$		$t_{NO2}/t_{NO1}$		
	f.1	f.2	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	0.70	1.15	0.70	1.12	<b>1.12</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	0.98	1.09	0.98	1.01	<b>1.02</b>
<b>P<sub>3</sub></b>	0.91	0.94	0.91	0.94	<b>0.94</b>
<b>P<sub>4</sub></b>	1.01	1.53	1.01	1.62	<b>1.62</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	0.85	0.99	0.85	1.04	<b>1.03</b>
<b>P<sub>6</sub></b>	1.04	1.23	1.33	1.25	<b>1.25</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	0.93	0.97	0.82	0.98	<b>0.98</b>
<b>P<sub>8</sub></b>	0.88	0.83	0.81	1.10	<b>1.07</b>
<b>P<sub>9</sub></b>	1.03	0.93	1.03	0.93	<b>0.93</b>
<b>P<sub>10</sub></b>	0.91	0.94	0.91	0.98	<b>0.97</b>

#### 6.3.3.4 Mètode de Newton Truncat.

Com ja s'ha comentat a la secció 6.1.3 l'opció per defecte de càlcul de les direccions de descens implementada a NOXCB 9.0 consisteix en l'ús de l'aproximació quasi-Newton mentre el nombre de superbàsiques es manté per sota de 500 i el canvi a Newton Truncat quan ultrapassa aquest valor. Per tal de comprovar quin seria l'efecte d'aplicar exclusivament Newton Truncat s'han executat els problemes EIO/UPC10 forçant el càlcul de la direcció de descens per Newton Truncat sempre, amb l'algorisme del Gradient Conjugat A5.3 i paràmetres de control  $\eta_0 = 10^{-5}$ ,  $\eta_1 = 0.5$  i  $i_{max} = 20$ . Dels resultats obtinguts (taules 6.23 i 6.24) es poden extreure tres conclusions principals :

- i)* Es manifesta una disminució notable del nombre d'iteracions a la fase 2, tret del problema  $P_9$ . Aquest fet possa de manifest la millor convergència del MNT respecte del MQN. La disminució del nombre d'iteracions es deu a una reducció del nombre d'iteracions al subespai nul necessari per tal d'assolir el criteri de convergència (5.25), com indica l'increment de la fracció del nombre de pivotacions piv%.

**Taula 6.22 :** Resultats amb ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ .

		Iteracions		piv	deg	rein	$f(x)/$	Iteracions			Temps d'execució		
		f.1	f.2	%	%	%	iter	MNT	GC	MQN	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	NO1	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	160.1	160.7
	NO2	1	2538	9	4	0.04	3.86	211	4431	2326	0.1	178.7	179.3
<b>P<sub>2</sub></b>	NO1	657	1731	70	61	1.01	0.87	0	0	1730	1.7	14.0	16.1
	NO2	655	1618	64	55	0.84	1.06	0	0	1617	1.7	14.2	16.4
<b>P<sub>3</sub></b>	NO1	74	2186	41	35	0.18	1.26	0	0	2185	0.5	81.4	83.0
	NO2	74	2180	41	34	0.18	1.27	0	0	2179	0.5	76.5	78.0
<b>P<sub>4</sub></b>	NO1	80	7372	21	18	0.28	9.74	2661	55881	4705	3.4	2529.0	2533.0
	NO2	80	7817	23	20	0.30	9.36	2695	56595	5117	3.5	4091.9	4096.0
<b>P<sub>5</sub></b>	NO1	170	1958	68	36	1.50	0.98	0	0	1899	0.6	32.4	34.0
	NO2	170	2053	61	33	1.21	1.08	0	0	2012	0.5	33.6	35.0
<b>P<sub>6</sub></b>	NO1	1242	6062	32	11	0.85	6.03	1981	24210	4085	10.6	861.4	873.0
	NO2	1587	6143	36	15	0.96	5.56	1863	21963	4279	14.2	1076.7	1091.8
<b>P<sub>7</sub></b>	NO1	1511	8549	88	44	2.00	0.68	0	0	8065	16.8	366.4	387.1
	NO2	1335	8698	87	44	1.93	0.70	0	0	8209	13.8	360.6	378.4
<b>P<sub>8</sub></b>	NO1	7560	33182	89	78	0.91	0.33	0	0	32312	153.1	1655.3	1811.3
	NO2	6941	43877	89	81	0.86	0.28	0	0	42574	123.3	1817.4	1944.0
<b>P<sub>9</sub></b>	NO1	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	0.6	197.3	202.7
	NO2	1	2602	82	2	0.04	1.09	0	0	2601	0.6	184.0	189.0
<b>P<sub>10</sub></b>	NO1	4741	9768	80	0	1.47	1.20	0	0	9755	292.1	1874.9	2184.7
	NO2	4741	10097	80	0	1.49	1.20	0	0	10071	266.9	1829.5	2113.2

NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb ús de  $\overset{\circ}{C}$  i  $\overset{\circ}{S}$ .

- ii) Es produeix un espectacular increment del nombre d'avaluacions per iteració de la funció objectiu. Aquest increment es deu al fet que la implementació del MNT que incorpora NOXCB 9.0 necessita avaluar el gradient a cada iteració del Gradient Conjugat per tal de resoldre el producte  $H(x^k)v$  de la passa **[1.2]** de l'algorisme A5.3 mitjançant l'aproximació per diferències finites expressada a (5.6).
- iii) De la taula 6.24 es dedueix un clar empitjorament de l'eficiència, tant pel que fa al temps per iteració com pel que respecte al temps d'execució de la fase 2 i total. Queda clar, doncs que la millor convergència del MNT no és suficient per compensar l'increment de cost per iteració degut a l'augment del nombre d'avaluacions del gradient.

Taula 6.23 : Resultats amb el Mètode de Newton Truncat.

		Iteracions		piv %	deg %	rein %	$f(x)/$ iter	Iteracions			Temps d'execució		
		f.1	f.2					MNT	GC	MQN	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	NO1	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	160.1	160.7
	NO2	1	1190	18	9	0.08	18.46	1189	18686	0	0.1	128.3	128.9
<b>P<sub>2</sub></b>	NO1	657	1731	70	61	1.01	0.87	0	0	1730	1.7	14.0	16.1
	NO2	657	1522	76	67	1.06	3.88	1521	3262	0	1.7	39.8	42.0
<b>P<sub>3</sub></b>	NO1	74	2186	41	35	0.18	1.26	0	0	2185	0.5	81.4	83.0
	NO2	74	1339	52	44	0.21	4.08	1339	2693	0	0.5	119.9	121.4
<b>P<sub>4</sub></b>	NO1	80	7372	21	18	0.28	9.74	2661	55881	4705	3.4	2529.0	2533.0
	NO2	80	5304	31	26	0.41	19.44	5298	89742	0	3.5	3407.0	3411.3
<b>P<sub>5</sub></b>	NO1	170	1958	68	36	1.50	0.98	0	0	1899	0.6	32.4	34.0
	NO2	170	1627	71	38	1.45	5.31	1603	5527	0	0.6	120.7	122.2
<b>P<sub>6</sub></b>	NO1	1242	6062	32	11	0.85	6.03	1981	24210	4085	10.6	861.4	873.0
	NO2	1242	4424	42	14	1.11	11.35	4423	38631	0	11.3	957.6	969.8
<b>P<sub>7</sub></b>	NO1	1511	8549	88	44	2.00	0.68	0	0	8065	16.8	366.4	387.1
	NO2	1511	7921	93	46	2.09	3.32	7457	14070	0	17.4	1275.7	1297.5
<b>P<sub>9</sub></b>	NO1	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	0.6	197.3	202.7
	NO2	1	2710	85	2	0.59	2.08	2669	47	0	0.6	390.1	395.3
<b>P<sub>10</sub></b>	NO1	4741	9768	80	0	1.47	1.20	0	0	9755	292.1	1874.9	2184.7
	NO2	4741	9517	81	0	1.48	2.23	9509	348	0	289.0	2574.3	2879.8

- NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb MNT.
- El problema  $P_8$  no convergeix amb MNT. Es detecten Hessians projectats no suficientment definitos positius.

Taula 6.24 : Eficiència del Mètode de Newton Truncat. NO1 indica execució base. NO2 indica execució amb MNT.

	$(t/it)_{NO1}^{NO2}$		$t_{NO2}/t_{NO1}$		
	f.1	f.2	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	0.50	1.76	0.50	0.80	<b>0.80</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	0.98	3.23	0.98	2.84	<b>2.61</b>
<b>P<sub>3</sub></b>	1.00	2.40	1.00	1.47	<b>1.46</b>
<b>P<sub>4</sub></b>	1.03	1.87	1.03	1.35	<b>1.35</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	0.92	4.49	0.92	3.73	<b>3.59</b>
<b>P<sub>6</sub></b>	1.06	1.52	1.06	1.11	<b>1.11</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	1.04	3.76	1.04	3.48	<b>3.35</b>
<b>P<sub>9</sub></b>	1.03	1.89	1.03	1.98	<b>1.95</b>
<b>P<sub>10</sub></b>	0.99	1.41	0.99	1.37	<b>1.32</b>

### 6.3.3.5 Factorització de la base de treball.

Finalment, s'ha estudiat la influència del tipus de factorització de la base de treball. S'ha comparat la forma en producte de la inversa (FPI), tal com s'ha descrit a la secció 4.3.1, opció usada a l'execució base, amb la factorització LU, opció incorporada al paquet NOXCB 9.0 mitjançant la inclusió de les rutines F01BRF i F04AXF de la llibreria NAG. Els resultats obtinguts, resumits a les taules 6.26 i 6.25 indiquen que el temps per iteració, tant a la fase 1 com 2 és, tret dels casos  $P_6$  i  $P_8$ , inferior amb la FPI, assolint-se el cas extrem a la fase 1 del problema  $P_9$  (disminució del 50%). Aquest grau d'eficiència en el temps per iteració es reflecteix directament en la relació entre el temps d'execució total, matitzat en alguns casos per una variació poc rellevant del nombre d'iteracions. La contrapartida del guany de velocitat amb la FPI és la pèrdua d'estabilitat numèrica, que provoca l'abortament de l'execució del problema  $P_{10}$  quan s'usa la FPI. S'ha de comentar que la variant algorísmica estudiada en aquest apartat fa referència només al procés de "reinvertió" de la base de treball cada cert nombre d'iteracions, no a la seva actualització per pivotació. Aquesta actualització es du a terme mitjançant el procés descrit a la secció 3.2.2, tant si s'usa LU com FPI.

**Taula 6.25 :** Eficiència de la factorització LU de Q. NO1 indica execució base (FPI). NO2 indica execució amb LU.

	$(t/it) \frac{NO2}{NO1}$		$t_{NO2}/t_{NO1}$		
	f.1	f.2	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	1.00	1.03	1.00	1.03	<b>1.03</b>
<b>P<sub>2</sub></b>	1.34	1.32	1.28	1.09	<b>1.12</b>
<b>P<sub>3</sub></b>	1.20	1.05	1.26	1.08	<b>1.08</b>
<b>P<sub>4</sub></b>	1.76	1.22	1.76	1.22	<b>1.22</b>
<b>P<sub>5</sub></b>	1.16	1.28	1.18	1.28	<b>1.27</b>
<b>P<sub>6</sub></b>	0.96	0.93	1.08	0.85	<b>0.85</b>
<b>P<sub>7</sub></b>	1.15	1.11	1.16	1.20	<b>1.20</b>
<b>P<sub>8</sub></b>	1.00	0.99	1.00	0.97	<b>0.98</b>
<b>P<sub>9</sub></b>	2.05	1.08	2.05	1.08	<b>1.08</b>

Taula 6.26 : Resultats amb factorització LU de Q.

		Iteracions			piv deg	rein	$f(x)/$ iter	Iteracions			Temps d'execució		
		f.1	f.2	%				MNT	GC	MQN	f.1	f.2	Total
<b>P<sub>1</sub></b>	NO1	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	160.1	160.7
	NO2	1	2609	9	5	0.04	3.82	210	4410	2398	0.1	165.3	166.0
<b>P<sub>2</sub></b>	NO1	657	1731	70	61	1.01	0.87	0	0	1730	1.7	14.0	16.1
	NO2	626	1425	62	52	0.88	1.15	0	0	1424	2.2	15.2	18.0
<b>P<sub>3</sub></b>	NO1	74	2186	41	35	0.18	1.26	0	0	2185	0.5	81.4	83.0
	NO2	78	2239	41	34	0.17	1.27	0	0	2238	0.7	87.8	89.5
<b>P<sub>4</sub></b>	NO1	80	7372	21	18	0.28	9.74	2661	55881	4705	3.4	2529.0	2533.0
	NO2	80	7409	21	17	0.27	9.77	2676	56196	4727	6.0	3092.5	3099.3
<b>P<sub>5</sub></b>	NO1	170	1958	68	36	1.50	0.98	0	0	1899	0.6	32.4	34.0
	NO2	173	1958	59	30	1.17	1.13	0	0	1929	0.7	41.5	43.2
<b>P<sub>6</sub></b>	NO1	1242	6062	32	11	0.85	6.03	1981	24210	4085	10.6	861.4	873.0
	NO2	1396	5498	38	14	1.02	5.78	1434	21217	4063	11.4	728.8	741.3
<b>P<sub>7</sub></b>	NO1	1511	8549	88	44	2.00	0.68	0	0	8065	16.8	366.4	387.1
	NO2	1531	9244	85	41	1.93	0.74	0	0	8788	19.5	441.3	465.5
<b>P<sub>8</sub></b>	NO1	7560	33182	89	78	0.91	0.33	0	0	32312	153.1	1655.3	1811.3
	NO2	7560	32507	89	78	0.90	0.32	0	0	31637	153.4	1611.1	1767.9
<b>P<sub>9</sub></b>	NO1	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	0.6	197.3	202.7
	NO2	1	2597	83	2	0.04	1.09	0	0	2596	1.2	213.4	218.9

- NO1 indica execució base (FPI). NO2 indica execució amb LU.
- El problema  $P_{10}$  no convergeix si s'usa FPI.

## 6.4 Conclusions.

Les conclusions que es poden establir després de l'estudi dut a terme a les anteriors seccions són :

- 1.- Resultats generals : El promig d'eficiència de NOXCB 9.0 respecte de MINOS 5.3 és de  $t_{MI}/t_{NO} = 4.41$ . Dels 105 problemes resolts, MINOS 5.3 supera a NOXCB 9.0 en 17 casos, dels quals 13 corresponen als models de menor dimensió. El promig de  $t_{NO}/t_{MI}$  en aquests 17 casos és de  $t_{NO}/t_{MI} = 1.21$ . El grau d'eficiència creix a mida que ho fa la dimensió del problema.

2.- Característiques del problema :

2.1.- *Relació  $t/m$*  : Als problemes resolts amb f.o. EIO1 s'observa una disminució de l'eficiència del codi NOXCB 9.0 a mida que augmenta la relació  $t/m$ . La relació  $t/m$  no sembla influir en l'eficiència dels problemes resolts amb f.o. Namur. Es mantenen graus notables d'eficiència fins i tot amb valors  $t/m = 100\%$ .

2.2.- *Estructura de les constriccions a banda* : No s'observa cap influència sistemàtica entre l'eficiència de NOXCB 9.0 i el nombre de constriccions actives a l'òptim, esparsitat o rang dels elements de les constriccions a banda.

2.3.- *Nombre de variables superbàsiques a l'òptim  $s^*$*  : Per a models amb  $s^*$  baix, s'observa un empitjorament de l'eficiència a mida que augmenta  $s^*$ . El grau d'eficiència és més alt per models amb un nombre molt elevat de  $s^*$ .

3.- Variants algorísmiques : En general, l'ús de l'exploració lineal de Bertsekas i el MNT és desaconsellable. L'ús explícit dels cicles no clau i superbàsics és desaconsellable si  $s^*$  és molt elevat i indiferent altrament. L'ús de la FPI pel tractament de  $Q^{-1}$  s'ha mostrat més ràpida però menys estable que la factorització LU. Finalment el control de bloqueig no aporta variacions significatives al temps d'execució.

# CAPÍTOL 7

## Formulació i Antecedents (II).

### 7.1 Problemes d'Optimització i de Coordinació Hidro-Tèrmica.

La Coordinació Hidro-Tèrmica a curt termini és un dels problemes més importants a ser resolts en la gestió de les companyies elèctriques quan el parc de generació inclou unitats hidroelèctriques. La solució indica com distribuir la generació hidroelèctrica (sense cost) entre tots els embassament de la conca hidrogràfica i com assignar la generació a les unitats tèrmiques actives durant el període d'estudi, que a curt termini oscil·la entre un dia i una setmana, de forma que es minimitzin les despeses per consum de combustible. A la Coordinació Hidro-Tèrmica a curt termini la previsió horària de càrrega s'ha de cobrir de forma exacta, havent-se de satisfer alhora certs requeriments de reserva rodant fixats per a tenir en compte els errors en la previsió de càrrega i les panes de les màquines. Tant en el cobriment de la càrrega com en la satisfacció de la reserva rodant contribueixen tant les unitats hidràuliques com les tèrmiques. Com és habitual el període total d'estudi, de entre 24 i 168 hores es subdivideix en intervals temporals (habitualment de entre 1 i 4 hores), per als quals es consideren conegudes totes les dades, sent les variables de decisió les que descriuen l'estat de totes les unitats de producció, hidràuliques i tèrmiques, a cadascun d'aquests intervals temporals.

Dins d'aquesta exposició es distingirà entre el *Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica* i el *Problema de Coordinació Hidro-Tèrmica*, que poden ser definits, de forma molt simple, com :

**Definició 7.1 Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica a Curt Termini (POH) :** Donat un sistema hidràulic de generació d'energia elèctrica, l'optimització Hidro-Tèrmica a curt termini determina l'estat dels embassaments que minimitza les despeses de la generació tèrmica necessària per cobrir la demanda no satisfeta amb la generació hidràulica al llarg d'un període de temps. La generació de les unitats tèrmiques no s'optimitza ja que el parc tèrmic no s'inclou explícitament en el model.

**Definició 7.2 Problema de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini (PCH) :** Consisteix en el càlcul de l'estat dels embassaments d'un sistema hidràulic i de l'estat de les unitats d'un parc tèrmic de generació d'energia elèctrica que minimitzen els costos d'operació de tot el sistema. S'entén que la Coordinació Hidro-Tèrmica també optimitza l'assignació d'unitats tèrmiques a aturar i engegar en els diferents intervals. Si no és així i hom parteix d'uns estats engegats o aturats de cada unitat tèrmica donats, el problema de determinar la producció hidràulica i la tèrmica de cada unitat que es considera engegada s'anomena *Problema de Planificació Hidro-Tèrmica (PPH)*.

## 7.2 Model desacoblats de Planificació Hidro-Tèrmica.

Les tècniques de fluxos en xarxes han esdevingut l'eina més àmpliament usada en la resolució de problemes d'Optimització i Coordinació Hidro-Tèrmica. La literatura en Coordinació i Optimització Hidro-Tèrmica és rica. Els primers treballs sobre (POH) (Roshental [68], Carvalho i Soares [9]) consideraven només la maximització de l'estalvi en les despeses en la generació tèrmica degut a la generació hidràulica, sense cap altre consideració. Brännlud et al.[8] amplien el model amb la inclusió de constriccions de seguretat. Heredia i Nabona [47] consideraren constriccions de limitació de la generació hidràulica i constriccions de control de cabals, i formularen una funció objectiu amb termes corresponents a les pèrdues de les unitats hidràuliques i a les repercussions econòmiques de la reserva rodant hidràulica.



El problema de planificació Hidro-Tèrmica a curt termini ha motivat una activitat científica intensa durant els darrers anys, ja sigui com a problema principal [56,50,66] o com a subproblema del problema de Coordinació Hidro-Tèrmica [54,76]. El *model desacoblat* que adopten aquests autors és un mètode de descomposició que consisteix en la resolució per separat d'un subproblema hidràulic i d'un subproblema tèrmic, coordinant aquesta optimització desacoblada mitjançant :

- a) el pas dels preus marginals de la demanda horària, calculats a l'òptim de l'últim subproblema tèrmic, al subproblema hidràulic on són usats com a costos a la funció objectiu i
- b) la generació hidràulica calculada a l'òptim de l'últim subproblema hidràulic, i que es resta de la càrrega prevista abans de començar l'optimització del següent subproblema tèrmic.

### 7.2.1 Subproblema hidràulic.

El subproblema hidràulic es formula, segons els autors, com un problema de fluxos, lineals o no lineals, amb o sense constriccions a banda. Per tal de poder resoldre els subproblemes hidràulics mitjançant codis eficients de fluxos lineals en xarxes, la generació hidràulica, que apareix a la funció objectiu i és en realitat una funció no lineal de la descàrrega i del volum emmagatzemat, s'acostuma a aproximar a través d'una funció lineal de les descàrregues, amb uns coeficients de linealització que es mantenen constants durant tot el procés d'optimització (Johannesen et al.[50]), o que poden ser actualitzats periòdicament (Luo [56]). Li et al.[54] refinen l'aproximació lineal en considerar la dependència entre la generació hidràulica i el volum emmagatzemat. Wang i Shahidehpour [76] formulen la generació hidràulica com una funció quadràtica de descàrregues i volums, aplicant un algorisme de gradient reduït als subproblemes hidràulics, i Ohishi et al.[66] usen mètodes de simulació per resoldre el subproblema hidràulic. Franco et al.[32] han proposat recentment un nou model desacoblat basat en la relaxació de les constriccions de cobriment de càrrega mitjançant la inclusió a la funció objectiu d'una penalització quadràtica-lineal, seguint el mètode descrit per Zenios et al. [79]. En aquest model, la reserva rodant no es considera i la generació hidràulica es tracta de forma exacta.

### 7.2.2 Suproblema tèrmic.

El subproblema tèrmic s'acostuma a plantejar com un conjunt de problemes de despatxament òptim tèrmic, si la xarxa de transmissió no es pren en consideració [54,76], o com un conjunt de problemes independents de “*Optimal Power Flow*” (OPF), ja sigui amb l'aproximació de corrent continu [50,66,32,9] o de corrent altern [40]. La generació tèrmica s'optimitza amb un valor fix de la generació hidràulica que correspon a la solució òptima de l'últim subproblema hidràulic. Els models proposats a [56,50,66,76,32] consideren la demanda però no la reserva rodant, la qual s'inclou a [54].

## 7.3 Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica.

Els intents de resoldre els problemes hidràulics i tèrmic simultàniament han estat limitats. A [40] es resol un model acoblat amb OPF amb corrent altern i una modelització molt senzilla del sistema hidràulic.

El mètode desacoblat seguit pels treballs previs ha d'assumir valors de la generació hidràulica, per tal de definir límits a les constriccions de càrrega i reserva rodant durant l'optimització del subproblema tèrmic, i valors dels preus marginals de la producció tèrmica durant l'optimització del subproblema hidràulic. Donat que tant el valor de la generació hidràulica com el dels preus marginals a l'òptim són desconeguts, es poden necessitar moltes resolucions dels subproblemes fins assolir la convergència, qüestió que penalitza els models desacoblats.

L'ús del codi NOXCB 9.0 per a la resolució de problemes de Coordinació Hidro-Tèrmica ha permès l'optimització directa de problemes de Planificació Hidro-Tèrmica sense la seva descomposició en subproblemes hidràulic i tèrmic. La primera aplicació de NOXCB 9.0 a aquesta àrea [47], presentava la resolució d'un model d'Optimització Hidro-Tèrmica amb constriccions a banda per a controlar el cabal i el valor de la generació hidràulica. A

[48] el model usat habitualment per a l'optimització de la generació hidràulica a curt termini ha estat estès amb la inclusió de unitats tèrmiques dins d'un *model acoblat*, imposant constriccions de càrrega i reserva rodant a ser cobertes conjuntament pel parc hidràulic i tèrmic, i minimitzant directament els costos de producció tèrmica sense descomposar el model en subproblemes hidràulic i tèrmic. Finalment, aquest model acoblat s'ha ampliat a [49] amb la inclusió d'una descripció explícita de la xarxa de transmissió segons l'aproximació de corrent continu descrita per Carvalho et al.[10], donant lloc al model que serà presentat dins d'aquesta tesi doctoral.

Quan s'afegeixen al model constriccions per tal de mantenir la generació dins d'uns marges pre-establerts o per a satisfer un cert requeriment de reserva rodant, els codis de fluxos purs en xarxes no poden ser aplicats, degut a la presència de constriccions a banda no lineals. Tanmateix, si aquestes constriccions a banda es linealitzen es pot aplicar l'algorisme desenvolupat a la primera part d'aquesta tesi. El codi NOXCB 9.0 ha estat usat per a resoldre el Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica (MAPH) que es descriurà en els capítols següents. S'avaluarà la validesa dels resultats obtinguts comparant-los amb els proporcionats pel paquet MINOS 5.3 usat per a resoldre els mateixos models però sense linealitzar les constriccions a banda. El procés desenvolupat de linealitzacions successives de la generació hidràulica en termes de les variables hidràuliques (volums finals i inicials i descàrregues a cada interval temporal), introduïda per aconseguir unes constriccions a banda lineals, s'ha mostrat capaç de proporcionar solucions òptimes amb un error en l'aproximació per sota de l'error de previsió de càrrega, i amb una reducció dràstica dels temps d'execució respecte dels models amb constriccions a banda no lineals resolts amb MINOS 5.3.

Per acabar, es vol fer notar que la solució del model MAPH, prenent en consideració un model de transmissió de corrent continu, no és més que un problema OPF multi-interval Hidro-Tèrmic on els efectes d'acoblament de la generació hidràulica al llarg dels diferents intervals es considera de forma rigurosa. El problema OPF clàssic plantejat sobre un únic interval troba valors per a la generació tèrmica, però necessita conèixer un valor estimat "a priori" de la generació hidràulica. Aquests valors són difícils d'assignar si es vol que les descàrregues i volums dels embassaments romanguin entre límits i estiguin balancejats amb les aportacions naturals al llarg dels diferents intervals temporals en que ha estat subdividit el període d'estudi. Amb el model MAPH aquesta condició s'aconsegueix de

forma natural, doncs es redueix a la condició de factibilitat primal de les solucions del problema **(FNCL)** associat al model MAPH.

## CAPÍTOL 8

### Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica.

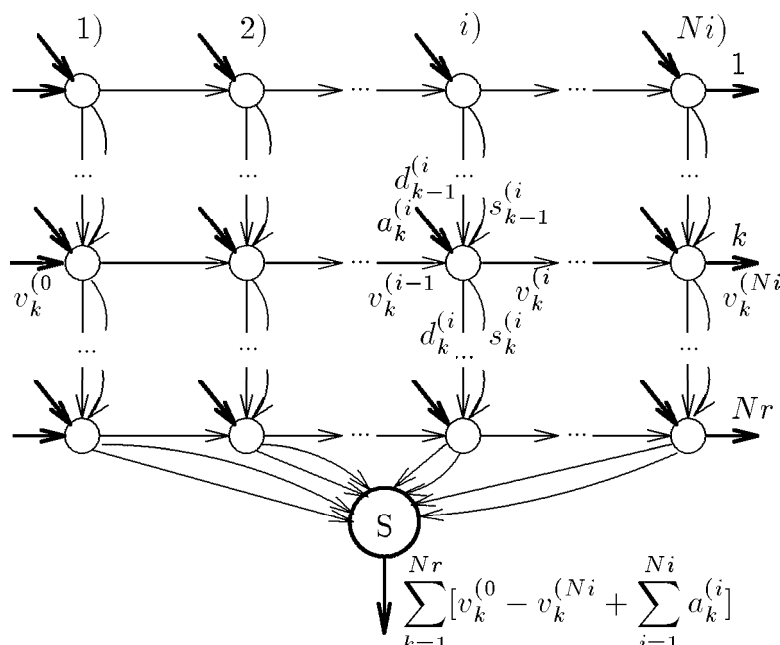
#### 8.1 Xarxa Hidràulica (XH).

La figura 8.1 representa una *xarxa replicada* o *xarxa hidràulica* (XH) que permet modelitzar l'evolució temporal de l'estat dels embassaments d'un sistema hidràulic de producció d'energia elèctrica. Les variables  $d_k^{(i)}$  i  $s_k^{(i)}$  indiquen, respectivament, la descàrrega i el vessament de l'embassament  $k$  a l'interval temporal  $i$ , la variable  $v_k^{(i-1)}$  és el volum de l'embassament  $k$  a l'inici de l' $i$ -èssim interval i la variable  $v_k^{(i)}$  representa el volum del mateix embassament a la fi del mateix interval, després de deixar anar la descàrrega  $d_k^{(i)}$  i el vessament  $s_k^{(i)}$ . L'equació de balanç del  $k$ -èssim embassament a l' $i$ -èssim interval seria :

$$a_k^{(i)} + v_k^{(i-1)} + d_{k-1}^{(i)} + s_{k-1}^{(i)} = v_k^{(i)} + d_k^{(i)} + s_k^{(i)} \quad (8.1)$$

on  $a_k^{(i)}$  és l'aportació natural rebuda a l'embassament  $k$  durant l'interval  $i$ , la qual és una dada coneguda.

Els algorismes de fluxos en xarxes poden modelitzar qualsevol configuració d'embassaments en cascada al llarg d'una conca hidrogràfica, amb qualsevol nombre de grups de descàrrega per embassament, amb i sense solapament, així com bombejos i retards en el transport de l'aigua entre dos embassaments successius. Per tal de simplificar la notació i les figures, els retards i bombejos s'han omès en la formulació que es presenta, i les



**Figura 8.1 :** Xarxa hidràulica XH amb  $Nr$  embassaments i  $Ni$  intervals.

variables  $d_{k-1}^{(i)}$  i  $s_{k-1}^{(i)}$  que apareixen a l'equació de balanç (8.1) representen les sumes de les descàrregues i vessaments de tots els embassaments aigües amunt.

El volum inicial i final de cada embassament a cada interval i les descàrregues i vessaments a cada embassament al llarg dels diferents intervals seràn anomenades *variables hidràuliques* doncs corresponen als fluxos de la xarxa hidràulica de la figura 8.1. Indicarem les variables hidràuliques amb el símbol  $x_H$ .

Per tal de prevenir que els embassaments del sistema efectuin vessaments sense estar a capacitat màxima, es poden incloure a la funció objectiu termes de penalització del tipus :

$$\pi_s \sum_{k=1}^{Nr} s_k^{(i)} (\bar{v}_k - v_k^{(i)}) \tag{8.2}$$

on  $\pi_s$  és un escalar positiu i  $\bar{v}_k$  és el màxim volum de l'embassament  $k$ . S'ha observat que aquests termes son diferents de zero durant les primeres iteracions de l'optimització, mentre no es troba una solució factible sense vessaments indeguts, moment a partir del qual romanen nuls.

## 8.2 Funció de generació hidràulica.

Dins d'una conca hidrogràfica, si l'embassament  $k$ -èssim és de salt variable, es pot calcular la seva generació al llarg de l'interval  $i$ -èssim a partir de l'energia potencial de l'aigua descarregada com :

$$H_k^{(i)} = \mu \rho_k^{(i)} h_k^{(i)} d_k^{(i)} \quad (8.3)$$

on  $\mu$  és la constant de conversió d'energia mecànica a elèctrica <sup>8</sup>,  $\rho_k^{(i)}$  és l'eficiència de la turbina de l'embassament  $k$ -èssim,  $h_k^{(i)}$  és l'alçada equivalent (alçada del centre de gravetat de la làmina d'aigua descarregada) i  $d_k^{(i)}$  és el volum d'aigua descarregat al llarg de l' $i$ -èssim interval. Aquesta expressió correspon a les expressions (2.1) i (4.16.a) de [39].

L'alçada està relacionada amb les variables de la xarxa mitjançant la *funció cota-volum*, que proporciona l'alçada de l'embassament  $h$  corresponent a un cert volum emmagatzemat  $v$ . El model desenvolupat considera una funció cota-volum que és un polinomi de tercer grau :

$$h_k = s_{bk} + s_{lk}v_k + s_{qk}v_k^2 + s_{ck}v_k^3 \quad (8.4)$$

on  $s_{bk}$ ,  $s_{lk}$ ,  $s_{qk}$  i  $s_{ck}$  són els coeficients bàsic, lineal, quadràtic i cúbic corresponents al  $k$ -èssim embassament. L'alçada equivalent  $h_k^{(i)}$  del  $k$ -èssim embassament a l'interval  $i$  es pot expressar en funció dels volums inicials i finals a l'interval  $i$ -èssim  $v_k^{(i-1)}$  i  $v_k^{(i)}$  a partir de l'expressió :

$$h_k^{(i)}(v_k^{(i)} - v_k^{(i-1)}) = \int_{v_k^{(i-1)}}^{v_k^{(i)}} (s_{bk} + s_{lk}v_k + s_{qk}v_k^2 + s_{ck}v_k^3) dv_k \quad (8.5)$$

que proporciona :

$$\begin{aligned} h_k^{(i)} = & s_{bk} + \frac{s_{lk}}{2}(v_k^{(i-1)} + v_k^{(i)}) + \frac{s_{qk}}{3}(v_k^{(i)} - v_k^{(i-1)})^2 \\ & + s_{qk}v_k^{(i-1)}v_k^{(i)} + \frac{s_{ck}}{4}[(v_k^{(i-1)})^2 + (v_k^{(i)})^2](v_k^{(i-1)} + v_k^{(i)}) \end{aligned} \quad (8.6)$$

---

<sup>8</sup> si la descàrrega s'expressa en  $Dm^3$ , l'alçada em  $m$  i la durada de l'interval és de  $1h$ , llavors  $\mu = 2.7222KW/(Dm^3 \times m)$ .

L'eficiència  $\rho_k^{(i)}$  canvia amb l'alçada i la descàrrega (degut a l'elevació de sortida de turbina i altres raons mecàniques), i s'ha modelitzat com una funció quadràtica de l'alçada equivalent i de la descàrrega :

$$\rho_k^{(i)} = \rho_{k0} + \rho_{kh}h_k^{(i)} + \rho_{kd}d_k^{(i)} + \rho_{khd}h_k^{(i)}d_k^{(i)} + \rho_{khh}(h_k^{(i)})^2 + \rho_{kdd}(d_k^{(i)})^2 \quad (8.7)$$

on  $\rho_{k0}$ ,  $\rho_{kh}$ ,  $\rho_{kd}$ ,  $\rho_{khd}$ ,  $\rho_{khh}$  i  $\rho_{kdd}$  són dades conegudes. Així doncs, la generació hidràulica  $H_k^{(i)}$  es modelitza com un polinomi de grau alt, funció de les variables  $v_k^{(i-1)}$ ,  $v_k^{(i)}$  i  $d_k^{(i)}$ . Aquesta modelització de la funció de generació hidràulica és més elaborada del que és habitual als articles de Coordinació Hidro-Tèrmica [56,50,76], però permet realitzar una millor linealització, la qual proporciona valors de la generació hidràulica més pròxims als reals, sense implicar un increment de cost computacional significatiu.

Suposant l'existència de  $Nr$  embassaments, la generació hidràulica total al llarg de l' $i$ -èssim interval serà :

$$H^{(i)} = \sum_{k=1}^{Nr} H_k^{(i)} \quad (8.8)$$

### 8.3 Linealització de la generació hidràulica.

El procés d'optimització ha de satisfer constriccions de càrrega i de reserva rodant impossades a la generació total a cada interval. Malgrat que aquestes constriccions són lineals respecte de la generació hidràulica  $H_k^{(i)}$ , són no lineals respecte de les variables hidràuliques. Per tal d'alleugerir el procés d'optimització, aquestes constriccions no lineals són aproximades via una funció lineal de les variables de xarxa, de forma que les constriccions de càrrega i de reserva rodant esdevenen lineals. La linealització de  $H_k^{(i)}$  prové del desenvolupament en sèrie de Taylor al voltant d'un punt, en general factible,  $(v_{Fk}^{(i-1)}, v_{Fk}^{(i)}, i d_{Fk}^{(i)})$ , que proporciona l'expressió :

$$H_{Lk}^{(i)} = \lambda_{0k}^{(i)} + \lambda_{v^{(i-1)k}}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v^{(i)k}}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)} \quad (8.9)$$

on  $\lambda_{0k}^{(i)}$  és el terme independent i  $\lambda_{v^{(i-1)k}}^{(i)}$ ,  $\lambda_{v^{(i)k}}^{(i)}$  i  $\lambda_{dk}^{(i)}$  són, respectivament, els coeficients lineals corresponents a les variables hidràuliques  $v_k^{(i-1)}$ ,  $v_k^{(i)}$  and  $d_k^{(i)}$ . L'expressió analítica d'aquests coeficients es pot trobar a l'apèndix AP1 .



La precisió de la linealització que s'acaba de descriure es podrà avaluar a partir dels resultats que es presentaran més endavant. Aquests resultats satisfan que la diferència en valor absolut entre la generació hidràulica linealitzada  $H_{Lk}^{(i)}$  i la generació hidràulica exacta  $H_k^{(i)}$  és sempre inferior a l'1.5% de la càrrega a l'interval  $i$ , que és força acceptable tenint en compte els errors habituals de previsió de la càrrega horària a curt termini. Aquesta precisió no s'assoleix habitualment amb la primera linealització realitzada al voltant del primer punt factible, però sí després d'un nombre reduït de linealitzacions addicionals. L'error de la linealització és calculat després de l'obtenció d'un òptim. Si aquest error es troba per sobre d'una certa fracció de la càrrega (per exemple, un 2%) en algun interval, s'efectua una nova linealització sobre el darrer òptim obtingut, i es torna a engegar el procés d'optimització.

## 8.4 Reserva rodant hidràulica.

L'expressió de la linealització de la reserva incremental de les unitats hidràuliques (la quantitat en que es pot incrementar la generació hidràulica) a l'interval  $i$  és :

$$\sum_{k=1}^{Nr} \left[ \overline{H}_k^{(i)} - (\lambda_{0k}^{(i)} + \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)}) \right] \quad (8.10)$$

on  $\overline{H}_k^{(i)}$  representa la generació hidràulica màxima de l'embassament  $k$ -èssim al llarg de l'interval  $i$ -èssim. Aquesta generació màxima depèn dels valors actuals dels volums inicial i final  $v_k^{(i-1)}$  i  $v_k^{(i)}$ , però al codi desenvolupat per a aquesta tesi es calcula previament al procés d'optimització usant uns valors  $v_k^{(i-1)}$  i  $v_k^{(i)}$  prefixats, i es manté constant al llarg del procés d'optimització.

El valor de la reserva rodant decremental linealitzada (disminució màxima de la generació hidràulica al llarg de l'interval  $i$ ) coincideix amb el valor de la generació hidràulica total linealitzada :

$$\sum_{k=1}^{Nr} \left[ \lambda_{0k}^{(i)} + \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)} \right] \quad (8.11)$$

Es considera que es pot disposar tant de la reserva rodant hidràulica incremental com de la decremental en un temps curt respecte del temps de disponibilitat de la reserva tèrmica.

## 8.5 Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica a Curt Termini.

La formulació matemàtica del problema (**POH**) definit a D7.1 consisteix en la minimització d'una certa funció de les variables hidràuliques  $x_H$ , relacionada sempre amb el cost de la generació tèrmica necessària per a cobrir la part de la demanda no satisfeta amb la generació hidràulica, subjecte a les equacions de xarxa i capacitats de la XH, i, possiblement, a un conjunt de constriccions a banda de diverses característiques (seguretat, fites a la generació hidràulica, irrigació, emissions contaminants, etc). La primera aplicació del codi NOXCB 9.0 al camp de la Coordinació Hidro-Tèrmica a curt termini va consistir en la resolució de problemes (**POH**) basats en el model de XH descrit i amb una funció objectiu que es descriurà a continuació. Els resultats d'aquesta aplicació es poden trobar a [47].

Existeixen diverses formes de definir la funció objectiu del problema (**POH**). La forma que s'ha tingut en compte en aquest treball correspon a les especificacions sorgides de les reunions mantingudes amb diverses companyies del sector elèctric espanyol dins del marc d'un conveni Universitat-empresa <sup>9</sup>. Aquesta funció objectiu recull les característiques d'operació del sector elèctric espanyol pel que fa a l'assignació de reserva rodant a les diferents companyies de l'estat espanyol (que poden ser diferents a les d'altres països), així com el model de pèrdues associades a la xarxa de transmissió usat per aquestes companyies. La funció objectiu resultant té l'expressió :

$$f(x_H) = \sum_{i=1}^{Ni} f^{(i)}(x_H) = \sum_{i=1}^{Ni} \sum_{j=1}^4 f_j^{(i)}(x_H) \quad (8.12a)$$

$$f_1^{(i)} = -c^{(i)} H^{(i)} \quad , \quad c^{(i)} > 0 \quad (8.12b)$$

$$f_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{Nr} \left( l_k H_k^{(i)} + q_k (H_k^{(i)})^2 \right) \quad (8.12c)$$

---

<sup>9</sup> Conveni C0919 : Subministrament de programes de Coordinació Hidro-Tèrmica a curt termini per a una compra conjunta de FECSA, ENHER, S.A. i HECSA.

$$f_3^{(i)} = \sum_{k=1}^{Nr} \bar{P} \left( 1 - e^{-K(\bar{H}_k^{(i)} - H_k^{(i)})} \right) \quad (8.12d)$$

$$f_4^{(i)} = \pi_s \sum_{k=1}^{Nr} s_k^{(i)} (\bar{v}_k - v_k^{(i)}) \quad (8.12e)$$

on :

(8.12b) representa l'estalvi en les despeses per generació tèrmica degut a la generació hidràulica a l'interval  $i$ .

(8.12c) és el valor aproximat de les pèrdues a l'interval  $i$  associades al transport de la generació hidràulica. Les pèrdues a cada unitat es formulen com un funció quadràtica de la generació, sense termes creuats.

(8.12d) representa una bonificació econòmica de la reserva rodant incremental  $S = \bar{H}_k^{(i)} - H_k^{(i)}$  a cada interval. La bonificació econòmica  $P$  és proporcional a reserva rodant, però només fins a un cert valor  $\bar{S}$  a partir del qual és constant i igual a  $\bar{P}$ . Aquest model de bonificació, que és una funció lineal per trams (i per tant no diferenciable) s'aproxima mitjançant la funció diferenciable  $\bar{P} \left( 1 - e^{-K(\bar{H}_k^{(i)} - H_k^{(i)})} \right)$  on  $K$  s'ha d'ajustar de forma que  $\left( 1 - e^{-K\bar{S}} \right) \approx 1$ .

(8.12e) penalització per vessament indegut descrita a (8.2) .

Els problemes (**POH**) resolta a [47] són problemes (**FNCL**) amb la funció objectiu (8.12a) , equacions de xarxa corresponents a la XH de la figura 8.1, i un conjunt de constriccions a banda que limiten el valor d'una aproximació lineal de la generació  $H^{(i)}$  que no té en compte la dependència respecte dels volums, és a dir, una aproximació lineal del tipus :

$$H^{(i)} \simeq \sum_{k=1}^r \gamma_k^{(i)} d_i^{(i)} \leq H_{\max}^{(i)} \quad i \in \bar{I}$$

on  $\gamma_k^{(i)} = \mu \rho_k^{(i)} h_k^{(i)}$  i  $\bar{I}$  és el conjunt d'índexos dels intervals on es vol limitar la generació hidràulica. La resolució d'aquests models varen proporcionar la primera experiència computacional comparativa de NOXCB 9.0 i MINOS 5.3 sobre problemes d'escala petita-mitjana. Una anàlisi detallada d'aquesta comparativa es pot trobar a [47].

El punt més destacable d'aquests models és el gran cost computacional de la funció objectiu. En alguns casos, amb un promig de dues avaluacions de  $f(x_H)$  per iteració, el temps consumit en el conjunt total de crides a la subrutina de càlcul de  $f(x_H)$  arribava a ser de l'ordre del 60% del temps total d'execució. Aquest handicap del model d'Optimització Hidro-Tèrmica plantejat prové del fet de modelitzar via la funció objectiu l'estalvi de fuel de les tèrmiques, les pèrdues i la reserva rodant. La solució que es proposa en aquesta tesi és la inclusió explícita del parc tèrmic i de la xarxa de transmissió dins del model d'optimització. S'obté d'aquesta forma l'anomenat *Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica* MAPH que serà presentat al següent capítol.

## CAPÍTOL 9

### Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica.

#### 9.1 Model de xarxa de la generació tèrmica.

La inclusió explícita del parc tèrmic dins del problema d'Optimització Hidro-Tèrmica és possible mitjançant l'addició al model del problema d'Optimització Hidro-Tèrmica d'un conjunt de variables i constriccions a banda. Tanmateix, és possible formular un model de fluxos en xarxa ampliat que descriu el parc tèrmic, tal com es demostrarà en el següent apartat.

##### 9.1.1 Xarxa tèrmica equivalent del generador tèrmic $j$ .

Sigui  $P_j$  la potència generada per la  $j$ -èssima unitat tèrmica, i sigui  $\bar{P}_j$  i  $\underline{P}_j$  els límits d'operació superior i inferior.

$$\underline{P}_j \leq P_j \leq \bar{P}_j \quad (9.1)$$

La *reserva rodant incremental* (ISR)<sup>10</sup>  $r_{Ij}$  de la unitat " $j$ " és la quantitat en que pot ser incrementada la potència actual durant un interval de temps donat  $t_{ISR}$ . La reserva rodant incremental màxima  $\bar{r}_{Ij}$  de la unitat tèrmica  $j$ -èssima és el producte entre la taxa de potència incremental (MW/min) i el temps de resposta  $t_{ISR}$ , expressat en minuts. De forma equivalent, la *reserva rodant decremental* (DSR)<sup>11</sup>  $r_{Dj}$  de la unitat tèrmica  $j$ -èssima

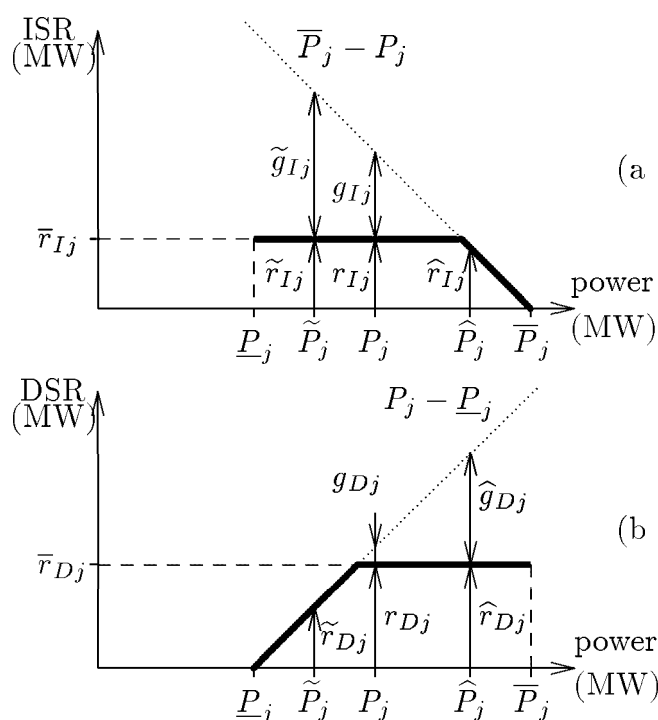
<sup>10</sup> "Incremental Spinning Reserve"

<sup>11</sup> "Decremental Spinning Reserve"

és la quantitat en que es pot disminuir el valor actual de la generació  $P_j$  durant l'interval de temps  $t_{DSR}$ . El valor màxim de  $r_{Dj}$  es representarà per  $\bar{r}_{Dj}$ . La reserva incremental  $r_{Ij}$  i decremental  $r_{Dj}$  de la unitat  $j$ -èssima es pot expressar com :

$$r_{Ij} = \min\{\bar{r}_{Ij}, \bar{P}_j - P_j\} \tag{9.2}$$

$$r_{Dj} = \min\{\bar{r}_{Dj}, P_j - \underline{P}_j\} \tag{9.3}$$



**Figura 9.1 :** Funcions de reserva rodant de la  $j$ -èssima unitat tèrmica a) incremental (ISR) i b) decremental (DSR).

que corresponen a la línia gruixuda de les figures 9.1a) i b), on s'ha representat la ISR i la DSR de la unitat  $j$ -èssima en funció de la potència generada. Seguint aquestes figures es pot observar que, associats a cada nivell de potència  $\tilde{P}_j$ ,  $P_j$  i  $\hat{P}_j$  es té una ISR  $r_{Ij}$ , una DSR  $r_{Dj}$  i uns gaps de potència  $g_{Ij} = \bar{P}_j - P_j - r_{Ij} \geq 0$  i decremental  $g_{Dj} = P_j - \underline{P}_j - r_{Dj} \geq 0$ , de forma que es satisfà :

$$r_{Ij} + g_{Ij} = \bar{P}_j - P_j \tag{9.4}$$

$$r_{Dj} + g_{Dj} = P_j - \underline{P}_j \tag{9.5}$$

### 9.1.2 Xarxa tèrmica a l'interval $i$ ( $\mathbf{XT}^{(i)}$ ).

La generació d'una unitat tèrmica, llur ISR i DSR, els *gaps* de potència i els límits operatius poden ésser modelitzats apropiadament mitjançant fluxos que circulen per la *xarxa tèrmica equivalent* mostrada a la figura 9.2 a) i b).

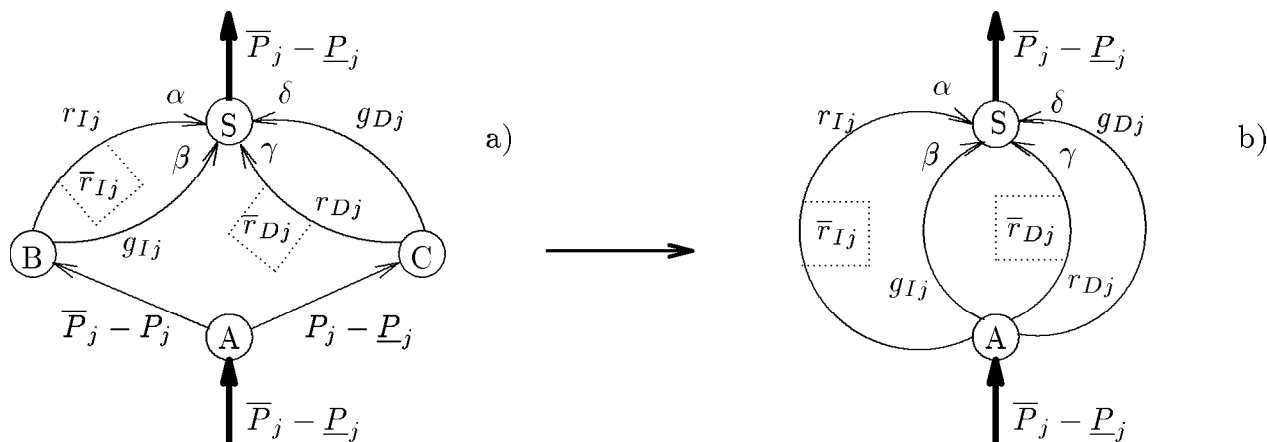
Consideri's la relaxació de les equacions (9.4) i (9.5) consistent en la substitució de les igualtats per desigualtats :

$$r_{Ij} \leq \min\{\bar{r}_{Ij}, \bar{P}_j - P_j\} \begin{cases} r_{Ij} \leq \bar{r}_{Ij} & (9.6) \\ r_{Ij} \leq \bar{P}_j - P_j & (9.7) \\ \downarrow \\ r_{Ij} + g_{Ij} = \bar{P}_j - P_j & (9.8) \end{cases}$$

$$r_{Dj} \leq \min\{\bar{r}_{Dj}, P_j - \underline{P}_j\} \begin{cases} r_{Dj} \leq \bar{r}_{Dj} & (9.9) \\ r_{Dj} \leq P_j - \underline{P}_j & (9.10) \\ \downarrow \\ r_{Dj} + g_{Ij} = P_j - \underline{P}_j & (9.11) \end{cases}$$

Aquesta aproximació equival a treballar amb uns valors de reserva incremental i decremental inferiors als valors reals. Més tard veurem que aixó no representa cap problema a l'hora de satisfer els requeriments de reserva. Les equacions (9.8) i (9.11) són les equacions de balanç dels nusos B i C de la gràfica a) de la figura 9.2. El nus A rep una injecció de potència de valor  $\bar{P}_j - \underline{P}_j$  que és recollida al nus pou S. Els arcs  $\alpha$  i  $\beta$  amb nus origen B i destí S transporten, respectivament, la reserva incremental  $r_{Ij}$  i el *gap* de potència  $g_{Ij}$ . Per tal que la reserva incremental no ultrapassi el seu limit, cal imposar una fita superior de valor  $\bar{r}_{Ij}$  a l'arc  $\alpha$ . Per la seva banda, els arcs  $\gamma$  i  $\delta$  amb nus origen C i destí S transporten la reserva decremental el primer, i el *gap* decremental el segon, tenint l'arc  $\gamma$  una capacitat que coincideix amb la reserva decremental màxima  $r_{Ij}$ . El flux  $P_j - \underline{P}_j$  des del nus A al nus C està associat amb el cost de generació.

De fet, l'arc que va del nus A al nus B a la figura 9.2a) no és necessari, i pot ésser eliminat, tal com s'ha fet a la figura 9.2b), doncs la suma del flux dels arcs  $\alpha$  i  $\beta$  tindrà sempre un valor igual a  $\bar{P}_j - P_j$ . La mateixa situació es dona en l'arc que va del nus A



**Figura 9.2 :** Xarxa tèrmica equivalent per a la unitat tèrmica  $j$ -èssima.

al nus C, que també es pot suprimir. Malgrat el fet que el flux que circulava per aquest arc, de valor  $P_j - \underline{P}_j$ , és necessari pel càlcul dels costos de producció, la seva supressió no representa cap problema, doncs només cal substituir a la funció objectiu  $P_j - \underline{P}_j$  per  $r_{Dj} + g_{Dj}$ . Així doncs, la xarxa tèrmica simplificada que s'usarà serà la de la figura 9.2b) tot i que, per raons de claretat, es conservarà en alguns punts de l'exposició la notació  $P_j - \underline{P}_j$ , equivalent a  $r_{Dj} + g_{Dj}$ .

La definició dels *gaps* de potència que es desprén de les gràfiques 9.1a) i b) requereix que els *gaps* siguin nuls sempre que la reserva no assoleixi el seu límit. En la formulació presentada no hi ha garanties de que aixó sigui així, degut a la relaxació introduïda en la definició de la reserva incremental i decremental a (9.6) -(9.11) Malgrat aixó, sempre es satisfarà que els valors de  $r_{Ij}$  i  $r_{Dj}$  seran prou alts com perquè, junt amb la reserva hidràulica, els requeriments de reserva siguin satisfets a cada interval. En tot cas, un cop realitzada l'optimització, els fluxos dels arcs de reserva i *gap* es poden redistribuir de forma que es passi flux de l'arc  $\beta$  a l'arc  $\alpha$  i de l'arc  $\delta$  al  $\gamma$ , fins allà on permetin les capacitats d'aquests arcs, sense que el valor de la funció objectiu a l'òptim es vegi modificada.

Com ja s'ha comentat al començament d'aquesta secció, és possible descriure la reserva i el nivell de generació d'una unitat tèrmica mitjançant la inclusió de les equacions (9.7) i (9.10) com a constriccions a banda i de les variables  $r_{Ij}$ ,  $r_{Dj}$  i  $P_j$  com a variables a banda. Aixó implica una ampliació del model d'Optimització Hidro-Tèrmica amb dues constriccions a banda i tres variables a banda per cada unitat tèrmica i interval. El model



de xarxa tèrmica equivalent proposat és clarament superior, doncs només requereix ampliar la xarxa existent amb quatre arcs i un únic nus, sense introduir-hi cap constricció a banda.

### 9.1.3 Constriccions multiples de reserva rodant.

Amb el model de fluxos proposat per a una única unitat tèrmica, només es pot imposar una constricció ISR i DSR per interval. Tanmateix, es pot voler imposar més d'una constricció de reserva per interval, amb diferents temps de resposta: per exemple, una constricció ISR a 5 minuts i un altre a 10 minuts, cadascuna amb el seu límit  $\bar{r}_{I5j}$  i  $\bar{r}_{I10j}$ ,  $j = 1, \dots, Nu$  i requeriments  $R_{I5}$  i  $R_{I10}$ . El model de xarxa que es proposa es pot estendre fàcilment per tal d'incloure variables addicionals que permetin formular les noves constriccions de reserva rodant, tal com indica la figura 9.3. Consideri's que es tinguéssin dues constriccions de ISR. Llavors el nus B es pot separar en dos nusos, B5 i B10, i els arcs  $\alpha 5$  i  $\beta 5$  van del nus B5 al nus B10, i els arcs  $\alpha 10$  i  $\beta 10$  van del nus B10 al nus pou S. El flux dels arcs  $\alpha 5$  i  $\alpha 10$  es limita amb el valor de la reserva incremental màxima  $\bar{r}_{I5j}$  i  $\bar{r}_{I10j}$  respectivament. Procedint d'aquesta forma el model conté les variables de reserva incremental a 5 i 10 minut  $r_{I5j}$  i  $r_{I10j}$ ,  $j = 1, \dots, Nu$  que es poden usar per a formular les constriccions de reserva. Tal com passava amb les xarxes tèrmiques de la figura 9.2, els arcs que van del nus A al nus B5 i C a la figura 9.3 es poden eliminar, de forma que els nusos B5 i C coincideixin amb A.

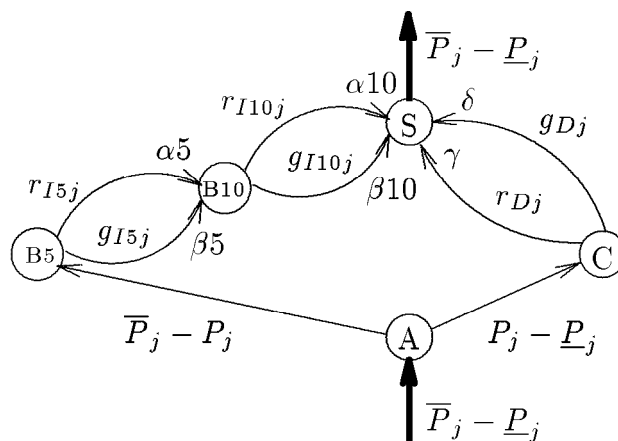


Figura 9.3 : Reserva rodant multiple. Dos ISR i una DSR.

### 9.1.4 Xarxa tèrmica.

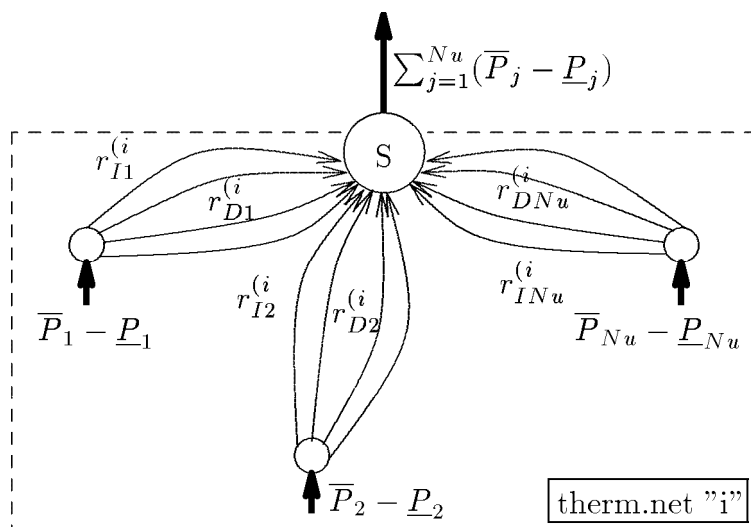
El model per a un generador que acaba de ser descrit pot ser estès a totes les unitats actives a l'interval "i", de forma que amb una única xarxa es representi la generació, ISR, DSR i els gaps de potència de totes les unitats actives. Totes les xarxes individuals poden compartir un únic nus pou S, tal com indica la figura 9.4, produint-se una extracció de flux al nus S de valor  $\sum_{j=1}^{Nu} (\bar{P}_j - \underline{P}_j)$  (es pot considerar que si la unitat tèrmica j no està activa a l'interval i es satisfà  $\bar{P}_j = \underline{P}_j = 0$ ). Aquesta *xarxa tèrmica a l'interval i*, que modelitza la generació tèrmica i la reserva rodant d'un únic interval "i", s'indica amb  $XT^{(i)}$ . Les equacions de balanç de la xarxa  $XT^{(i)}$  corresponents als nusos de cada unitat tèrmica són :

$$\bar{P}_j - \underline{P}_j = r_{Ij}^{(i)} + g_{Ij}^{(i)} + r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)} \quad j = 1, \dots, Nu \quad (9.12)$$

i la corresponent al nus pou S és :

$$\sum_{j=1}^{Nu} (r_{Ij}^{(i)} + g_{Ij}^{(i)} + r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{Nu} (\bar{P}_j - \underline{P}_j) \quad (9.13)$$

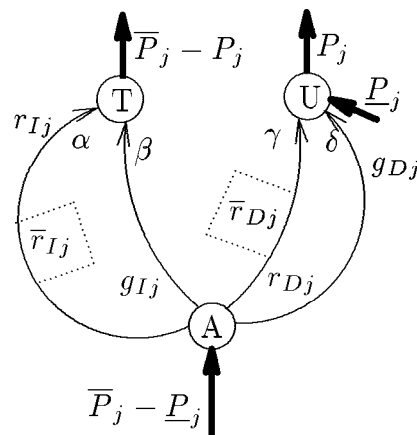
L'evolució temporal del parc tèrmic es pot modelitzar a partir del conjunt de xarxes  $XT^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, Ni$ , connectades totes al mateix nus pou S.



**Figura 9.4 :**  $XT^{(i)}$ , xarxa tèrmica interval i-èssim.

## 9.2 Xarxa tèrmica i Elèctrica a l'interval $i$ (XTE<sup>(i)</sup>).

Les línies de transmissió, de característiques conegudes i amb capacitat limitada, connecten les unitats de generació entre elles i amb els nusos de consum. La inclusió de la xarxa de transmissió dins del model d'optimització permet tenir en compte els límits de transmissió, que poden modificar el patró de generació tèrmic i hidràulic. Al llarg d'aquesta secció es mostrarà que és possible combinar la xarxa equivalent de cada unitat tèrmica i un model de corrent continu de la xarxa de transmissió com el descrit a [10], per tal d'obtenir un model de xarxa de la generació i la transmissió que asseguri el cobriment de la càrrega prevista, respecti les capacitats de les línies de transmissió i satisfaci la llei de Kirchhoff del corrent. La llei de Kirchhoff de les tensions també s'imposarà mitjançant un conjunt de constriccions a banda lineals.

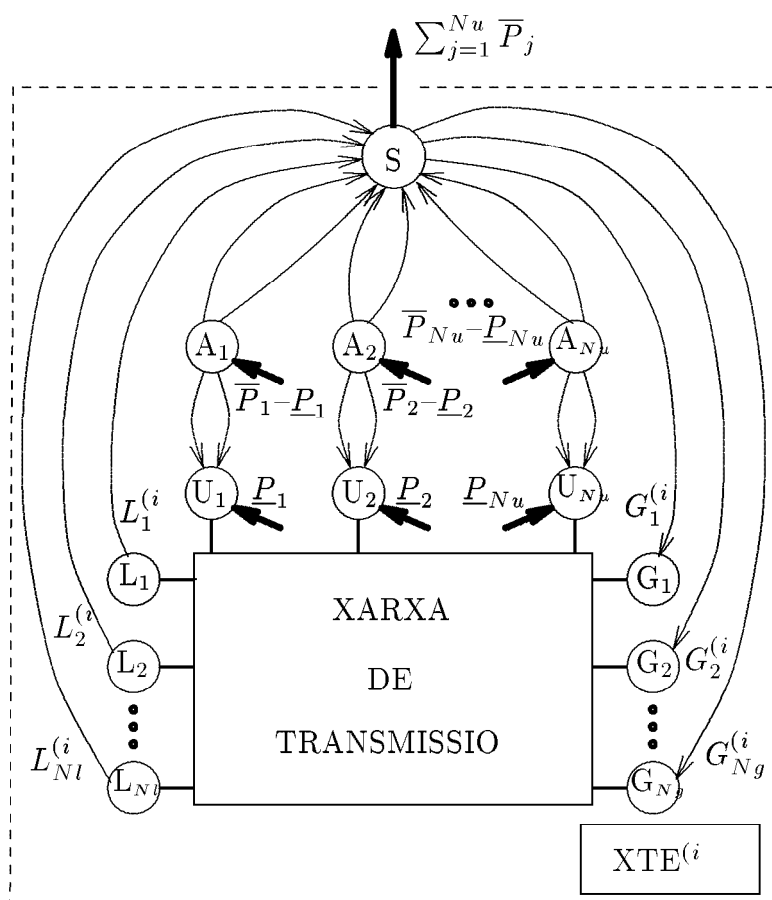


**Figura 9.5 :** Xarxa tèrmica de la unitat “ $j$ ” indicant la sortida de potència  $P_j$  al nus U.

El nus S de la figura 9.2 b) es pot separar en els nusos T i U, tal com s'indica en la figura 9.5. Es pot veure clarament que si s'injecta  $\underline{P}_j$  al nus U, el flux sortint d'aquest nus serà  $P_j$ : la generació de la unitat tèrmica  $j$ . Aquestes generacions tèrmiques poden ésser injectades a les barres de la xarxa de transmissió, tal com s'indica a la figura 9.6. Igualment, la generació hidràulica  $G_j^{(i)}$  dels embassaments individuals, o de grups d'embassaments de la conca hidrogràfica, es pot injectar a la xarxa de transmissió a través

dels  $Ng$  nusos indicats a la figura 9.6. Es considera la presència d'un conjunt de  $Nl$  nusos de càrrega, el consum dels quals a d'ésser subministrat conjuntament des dels nusos de generació tèrmica i hidràulica.

S'indicarà per  $XTE^{(i)}$  la xarxa formada per la unió de la xarxa de transmissió i el conjunt de xarxes tèrmiques equivalents corresponents a les unitats tèrmiques actives més els arcs de connexió dels nusos de càrrega i generació hidràulica. La xarxa  $XTE^{(i)}$  correspon a la gràfica de la figura 9.6.



**Figura 9.6 :** Xarxa tèrmica i elèctrica  $XTE^{(i)}$

El nus pou S permet balancejar la generació i la càrrega d'un interval donat "i". El nus S recull totes les càrregues ( $L_j^{(i)}, j=1, \dots, Nl$ ) i subministra la potència corresponent a la generació hidràulica ( $G_j^{(i)}, j=1, \dots, Ng$ ) mitjançant arcs artificials amb origen el nus pou S i destí els nusos  $G_j$  ( $j=1, \dots, Ng$ ). Dels nusos  $U_j$  ( $j=1, \dots, Nu$ ) surt la potència tèrmica  $P_j^{(i)}$ , que és injectada a la xarxa de transmissió. El nus S passa ara a ocupar el lloc del nus

T de la xarxa equivalent de cada unitat tèrmica, rebent els arcs  $\alpha$  i  $\beta$  de totes les unitats tèrmiques actives a l'interval  $i$ . Inspeccionant la xarxa de la figura 9.6 s'observa que els nusos  $A_j$  i  $U_j$  de cada unitat tèrmica reben una injecció conjunta de flux amb valor  $\bar{P}_j$ , sent la injecció total a la xarxa  $\sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j$ . Aquest és, doncs, el valor que caldrà extreure pel nus pou S per tal d'aconseguir una xarxa balancejada.

La generació hidràulica  $H_k^{(i)}$  ( $k=1, \dots, Nr$ ) ha de coincidir amb els fluxos que circulen pels arcs que connecten el nus pou S amb els nusos de generació hidràulica  $G_j$  ( $j=1, \dots, Ng$ ). Això s'aconsegueix amb la imposició de  $Ng$  constriccions a banda lineals que igualen el valor de les variables de generació hidràulica  $G_j^{(i)}$  a l'aproximació lineal de la generació hidràulica desenvolupada a (8.9) :

$$G_j^{(i)} = \sum_{k \in I_j} [\lambda_{0k}^{(i)} + \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)}] \quad , \quad j = 1, \dots, Ng \quad i = 1, \dots, Ni \tag{9.14}$$

on  $I_j$  és el conjunt d'índexos dels embassaments la generació dels quals està connectada a la xarxa de transmissió a través del nus  $G_j$ .

El valor del flux de càrrega  $L_j^{(i)}$ , amb origen  $L_j$  i destí S, està limitat a un interval d'amplada  $2\epsilon$  centrat sobre el valor previst de la càrrega  $l_j^{(i)}$  :

$$l_j^{(i)} - \epsilon \leq L_j^{(i)} \leq l_j^{(i)} + \epsilon \tag{9.15}$$

per a tot interval "i" i per a tot nus de càrrega "j", sent  $\epsilon$  un escalar arbitràriament petit, fixat per l'usuari. Seria també possible substituir l'arc  $L_j^{(i)}$  per una injecció negativa  $-l_j^{(i)}$  al nus  $L_j$  (per a tot  $j=1, \dots, Nl$ ), però l'experiència computacional indica que l'ús dels arcs addicionals entre  $L_j$  i S amb un rang de variació  $\pm\epsilon$  al voltant de  $l_j^{(i)}$  facilita el procés d'obtenció de solucions factibles. A part, s'ha de tenir present que els valors  $l_j^{(i)}$  no són més que valors estimats subjectes a errors de predicció, pel qual és ben raonable permetre un cert rang de variació.

La xarxa de transmissió està formada per un conjunt de connexions entre qualsevol parell de nusos  $U_1, \dots, U_{Nu}, G_1, \dots, G_{Ng}, L_1, \dots, L_{Nl}$ , ja sigui directament o via altres nusos anomenats *nusos de transbord* ( $T_1, \dots, T_{Nt}$ ). S'indicarà per  $\mathcal{X}$  el conjunt de parells  $(k, l)$  associats a línies existents a la xarxa de transmissió. Prenent una orientació arbitrària a

cada arc de la xarxa de transmissió, les equacions de balanç d'aquesta xarxa seràn :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{(k,l) \in \mathcal{U}_j^+} p_{kl}^{(i)} - \sum_{(k,l) \in \mathcal{U}_j^-} p_{kl}^{(i)} - r_{Dj}^{(i)} - g_{Dj}^{(i)} &= \underline{P}_j^{(i)} \quad j = 1, \dots, Nu \\ \sum_{(k,l) \in \mathcal{G}_j^+} p_{kl}^{(i)} - \sum_{(k,l) \in \mathcal{G}_j^-} p_{kl}^{(i)} &= \underline{G}_j^{(i)} \quad j = 1, \dots, Ng \\ \sum_{(k,l) \in \mathcal{L}_j^-} p_{kl}^{(i)} - \sum_{(k,l) \in \mathcal{L}_j^+} p_{kl}^{(i)} &= \underline{L}_j^{(i)} \quad j = 1, \dots, Nl \\ \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}_j^+} p_{kl}^{(i)} - \sum_{(k,l) \in \mathcal{T}_j^-} p_{kl}^{(i)} &= 0 \quad j = 1, \dots, Nt \\ -\bar{p}_{kl} &\leq p_{kl}^{(i)} \leq \bar{p}_{kl} \quad \forall (k,l) \in \mathcal{X} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, Ni \quad (9.16)$$

on  $\mathcal{U}_j^+, \mathcal{G}_j^+, \mathcal{L}_j^+, \mathcal{T}_j^+$  ( $\mathcal{U}_j^-, \mathcal{G}_j^-, \mathcal{L}_j^-, \mathcal{T}_j^-$ ) són els conjunts de línies amb origen (destí) als nusos  $U_j, G_j, L_j$  i  $T_j$  respectivament.  $\bar{p}_{kl}$  és la capacitat de la línia de transmissió  $(k, l)$ .

Donat que en una xarxa de corrent continu els fluxos de potència i de corrent coincideixen si estan expressats en per u (p.u.), les equacions de balanç del flux als nusos de la xarxa de transmissió asseguruen la satisfacció de la llei de Kirchhoff dels corrents. Per tal d'aconseguir una modelització realista dels fluxos de potència circulants per la xarxa de transmissió cal formular també la llei de Kirchhoff de les tensions a tots els cicles bàsics de la xarxa de transmissió, tal com s'indica a [10].

Sigui  $x_{kl}$  la reactància en p.u. de la línia de transmissió corresponent a l'arc  $(k, l) \in \mathcal{X}$  de la xarxa XTE<sup>(i)</sup>, i sigui  $p_{kl}$  el flux de potència circulant per aquest arc. La caiguda de tensió al llarg de l'arc  $(k, l)$  es pot expressar com  $x_{kl}p_{kl}$ . Si hom indica amb  $Nc$  el nombre de cicles bàsics presents a la xarxa de transmissió, el conjunt d'equacions lineals que formulen la segona llei de Kirchhoff és :

$$\sum_{(k,l) \in \mathcal{X}_j} x_{kl}p_{kl} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, Nc \quad (9.17)$$

on  $\mathcal{X}_j$  és el conjunt de parells  $(k, l)$  associats al cicle bàsic  $j$ -èssim.

Amb la inclusió de la xarxa de transmissió no és necessària la presència de una constricció de cobriment de càrrega, doncs la demanda específica de cada nus ja queda satisfeta mitjançant les equacions de balanç dels nusos  $L_j^{(i)}$ .

### 9.3 Xarxa ampliada (XA).

El conjunt total de variables que intervenen a la Planificació Hidro-Tèrmica a Curt Termini es poden modelitzar com els fluxos que circulen pels arcs d'una única xarxa com la descrita a la figura 9.7, que anomenarem *xarxa ampliada* (XA). Un únic nus pou recull el volum total d'aigua injectada a la xarxa hidràulica XH, amb valor  $\sum_{i=1}^{Ni} \sum_{k=1}^{Nr} a_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{Nr} (v_k^{(0)} - v_k^{(Ni)})$ , més la suma de la potència injectada a la xarxa tèrmica  $\sum_{i=1}^{Ni} \sum_{j=1}^{Nu} (\bar{P}_j - \underline{P}_j)$ , pel cas sense xarxa de transmissió, i  $\sum_{i=1}^{Ni} \sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j$  si s'afegeix la xarxa de transmissió.

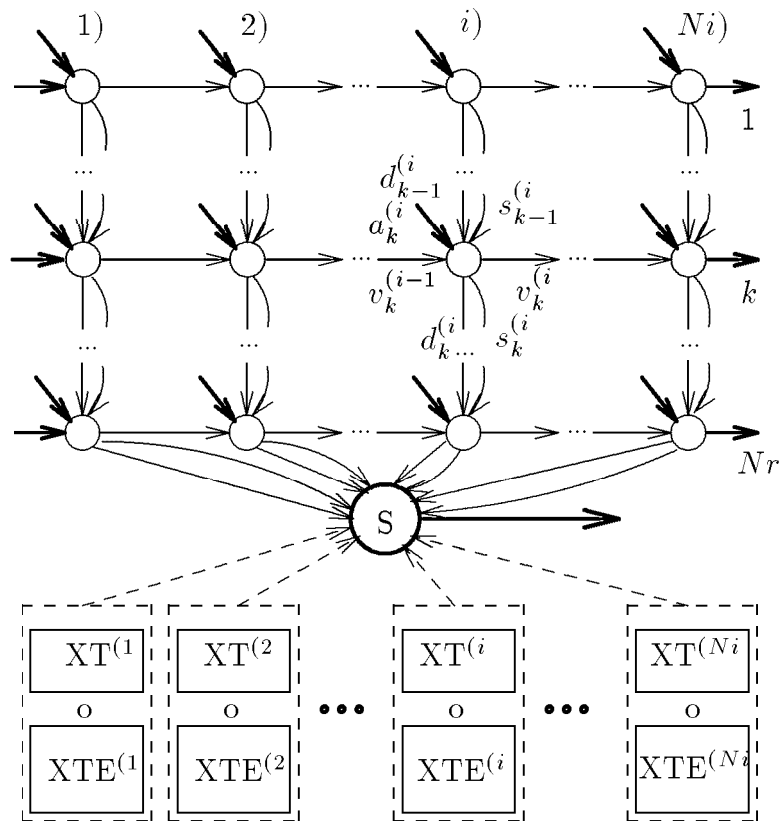


Figura 9.7 : Xarxa ampliada XA.

El fet que les xarxes XH i XTE<sup>(i)</sup> comparteixin el mateix nus pou no representa cap problema, doncs cada xarxa (XH i XTE<sup>(i)</sup>) està balancejada per separat. La xarxa XH no rep cap arc del nus S, i els nusos de XH connectats a S han d'enviar, en conjunt un flux necessàriament igual a la suma de les aportacions naturals, doncs la xarxa XH està balancejada. Per la mateixa raó, cada xarxa XT<sup>(i)</sup>, que tampoc rep cap arc de S, ha d'enviar sempre un flux net  $\sum_{j=1}^{Nu} (\bar{P}_j - \underline{P}_j)$ , doncs també està balancejada. El mateix raonament es pot aplicar a les xarxes XTE<sup>(i)</sup>, que sí rep de S els arcs de generació hidràulica  $G_j^{(i)}$  ( $j=1, \dots, Ng, i=1, \dots, Ni$ ). Tanmateix, això no representa cap problema, ja que els valors dels fluxos que circulen per aquests arcs està fixat per la constricció a banda (9.14). El fet d'usar un nus pou comú no és més que una estratègia per a reduir el nombre d'equacions de balanç, però no és el que fa que els sistemes hidràulic i tèrmic estiguin acoblats. El que provoca aquest acoblament és el fet que les seves variables s'optimitzen conjuntament respecte d'una única funció objectiu i, sobretot, subjectes a constriccions comunes de reserva rodant i de càrrega, constriccions on intervenen les variables hidràuliques i les variables tèrmiques.

## 9.4 Costos de generació tèrmica i pèrdues a la xarxa de transmissió.

El cost de generació de la  $j$ -èssima unitat tèrmica al llarg de l'interval  $i$ -èssim, es pot expressar com una funció quadràtica de la potència ([78], secció 2.1). Si indiquem per  $c_{lj}$  i  $c_{qj}$  els coeficients de cost lineal i quadràtic, respectivament, i ometem els possibles costos constant, que no afecten a l'optimització, l'expressió del cost de generació serà :  $c_{lj}P_j^{(i)} + c_{qj}(P_j^{(i)})^2$ . Tenint en compte la relació  $P_j = r_{Dj} + g_{Dj} + \underline{P}_j$  es pot expressar com :

$$(c_{lj} + 2c_{qj}\underline{P}_j)(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) + c_{qj}(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)})^2 + (c_{lj}\underline{P}_j + c_{qj}\underline{P}_j^2)$$

La part variable de la funció de costos corresponent a l'interval  $i$ -èssim es pot expressar com :

$$\min \sum_{j=1}^{Nu} [(c_{lj} + 2c_{qj}\underline{P}_j)(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) + c_{qj}(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)})^2] \quad (9.18)$$

Quan la XA estigui formada per XH i les xarxes XTE<sup>(i)</sup> descrites a la secció 9.2 les pèrdues no afecten a la generació injectada a la xarxa de transmissió, doncs es segueix l'aproximació



de corrent continu. Tanmateix, a efectes econòmics, les pèrdues poden ésser avaluades aproximadament i afegides a la funció objectiu per tal d'ésser minimitzades (Franco et al.[32]). Sigui  $p_{kl}^{(i)}$  el valor en p.u. del flux de potència de l'arc  $(k, l) \in \mathcal{X}$  a l'interval  $i$ ,  $r_{kl}$  la resistència en p.u. de la línia corresponent a aquest arc. Llavors, les pèrdues a aquesta línia poden ser calculades com  $r_{kl}[p_{kl}^{(i)}]^2$ . Si  $\pi^{(i)}$  és el preu per MW de pèrdues, aleshores el terme que s'haurà d'afegir a la funció objectiu és :

$$\sum_{i=1}^{Ni} \pi^{(i)} \sum_{(k,l) \in \mathcal{X}} r_{kl} [p_{kl}^{(i)}]^2 \quad (9.19)$$

## 9.5 Model Acoblat de Planificació Hidrotèrmica.

### 9.5.1 Funció Objectiu.

La funció objectiu a minimitzar és :

$$\min \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ \sum_{j=1}^{Nu} [(c_{lj} + 2c_{qj} P_j)(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) + c_{qj}(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)})^2] \right\} \quad (9.20)$$

sense la xarxa de transmissió, o :

$$\min \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ \sum_{j=1}^{Nu} [(c_{lj} + 2c_{qj} P_j)(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) + c_{qj}(r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)})^2] + \pi^{(i)} \sum_{(k,l) \in \mathcal{X}} r_{kl} [p_{kl}^{(i)}]^2 \right\} \quad (9.21)$$

si s'inclou la xarxa de transmissió, on l'últim terme correspon a l'avaluació del cost de les pèrdues.

### 9.5.2 Equacions de xarxa.

Les equacions de xarxa per a les variable hidràuliques i tèrmiques són :

$$a_k^{(i)} + v_k^{(i-1)} + d_{k-1}^{(i)} + s_{k-1}^{(i)} = v_k^{(i)} + d_k^{(i)} + s_k^{(i)} \quad , \quad k = 1, \dots, Nr \quad , \quad i = 1, \dots, Ni \quad (9.22)$$

$$\bar{P}_j - \underline{P}_j = r_{Ij}^{(i)} + g_{Ij}^{(i)} + r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)} \quad , \quad j = 1, \dots, Nu \quad , \quad i = 1, \dots, Ni \quad (9.23)$$

Les equacions de xarxa de la xarxa de transmissió són les expressades a (9.16) . L'equació de balanç del nus pou S quan no es condidera xarxa de transmissió és :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ d_{Nr}^{(i)} + s_{Nr}^{(i)} + \sum_{j=1}^{Nu} (r_{Ij}^{(i)} + g_{Ij}^{(i)} + r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) \right\} = \\ = \sum_{i=1}^{Ni} \sum_{k=1}^{Nr} a_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{Nr} (v_k^{(0)} - v_k^{(Ni)}) + \sum_{j=1}^{Nu} (\bar{P}_j - \underline{P}_j) \quad (9.24) \end{aligned}$$

i amb presència de la xarxa de transmissió seria :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{Ni} \left\{ d_{Nr}^{(i)} + s_{Nr}^{(i)} + \sum_{j=1}^{Nu} (r_{Ij}^{(i)} + g_{Ij}^{(i)}) - \sum_{j=1}^{Ng} G_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{Nl} L_j^{(i)} \right\} = \\ = \sum_{i=1}^{Ni} \sum_{k=1}^{Nr} a_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{Nr} (v_k^{(0)} - v_k^{(Ni)}) + \sum_{j=1}^{Nu} \bar{P}_j \quad (9.25) \end{aligned}$$

Els fluxos estan també sotmessos a fites superiors i inferiors, aquestes últimes nul·les en la major part dels casos.

### 9.5.3 Constriccions d'acoblament : càrrega i reserva.

Tal com s'ha vist a la primera part d'aquesta tesi, és possible resoldre eficientment problemes de fluxos no lineals en xarxes amb presència de constriccions a banda. En el model que s'està desenvolupant el conjunt de constriccions a banda pot estar format per diferents tipus de constriccions, depenent de la inclusió o no de la xarxa de transmissió.

Si no es considera xarxa de transmissió, és necessari incloure una constricció de cobriment de càrrega per interval. En aquest cas a la suma de fluxos  $r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}$  s'ha de sumar la potència mínima  $\underline{P}_j$  per tal de tenir la potència  $P_j^{(i)}$ . Les constriccions que assegurin el cobriment de la càrrega a cada interval en absència de xarxa de transmissió són :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{Nr} \left[ \lambda_{v^{(i-1)k}}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v^{(i)k}}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{d_k}^{(i)} d_k^{(i)} \right] + \sum_{j=1}^{Nu} (r_{Dj}^{(i)} + g_{Dj}^{(i)}) = \\ = L^{(i)} - \sum_{k=1}^{Nr} \lambda_{0k}^{(i)} - \sum_{j=1}^{Nu} \underline{P}_j \quad , \quad i = 1, \dots, Ni \quad (9.26) \end{aligned}$$

Si es considera la xarxa de transmissió, substituint  $XT^{(i)}$  per  $XTE^{(i)}$  a la xarxa ampliada XA, no és necessari considerar les constriccions (9.26) , pel fet que les equacions de balanç de la xarxa de transmissió (9.16) asseguruen el cobriment de la càrrega a cada interval. Per contra cal imposar les constriccions a banda de generació hidràulica (9.14) i de la llei de Kirchhoff de les tensions (9.17) .

Els requeriments de reserva incremental i decremental a cada interval  $i$  queden assegurats mitjançant les constriccions a banda :

$$\left. \begin{aligned}
 - \sum_{k=1}^{Nr} \left[ \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)} \right] + \sum_{j=1}^{Nu} r_{Ij}^{(i)} &\geq R_I^{(i)} - \sum_{k=1}^{Nr} \bar{H}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{Nr} \lambda_{0k}^{(i)} \\
 \sum_{k=1}^{Nr} \left[ \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)} \right] + \sum_{j=1}^{Nu} r_{Dj}^{(i)} &\geq R_D^{(i)} - \sum_{k=1}^{Nr} \lambda_{0k}^{(i)}
 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, Ni$$

(9.27)

on s'han usat les expressions (8.10) i (8.11) de la reserva hidràulica linealitzada. Les constriccions de càrrega i de reserva provoquen l'acoblament entre la xarxa hidràulica i tèrmica-transmissió a cada interval. La xarxa replicada hidràulica provoca l'acoblament temporal entre les variables hidràuliques i tèrmiques de diferents intervals.

## 9.6 Algorisme de resolució.

El model MAPH formulat a la secció precedent és un problema **(FNCL)** . Els coeficients  $\lambda$  de les constriccions a banda de càrrega (9.26) i de reserva (9.27) depenen del punt sobre el que s'ha realitzat la linealització de la generació hidràulica. Consideri's que s'ha resolt el problema **(FNCL)<sup>k</sup>** associat a un model MAPH<sup>k</sup> formulat amb uns coeficients  $[\lambda]^k$  calculats sobre un cert punt  $[x^*]^{k-1}$ , factible o no. Sigui  $[x^*]^k$  la solució òptima de **(FNCL)<sup>k</sup>**. Indicarem per  $[H^{(i)}]^k$  i  $[H_L^{(i)}]^k$  els valors de la generació hidràulica exacta i linealitzada respectivament, a l'interval  $i$ , sobre  $[x^*]^k$ . Es considerarà que la precisió de la linealització és acceptable si es satisfà :

$$| [H_L^{(i)}]^k - [H^{(i)}]^k | < \epsilon_L L^{(i)} \quad , \quad i = 1, \dots, Ni$$

(9.28)

és a dir, si la discrepància en valor absolut entre la generació hidràulica exacta i aproximada a cada interval es manté per sota de  $\epsilon_L L^{(i)}$ , on  $\epsilon_L$  és un valor a fixar per l'usuari. Sembla raonable relacionar el valor de  $\epsilon_L$  a l'error associat a la previsió de càrrega, que oscil·la al voltant d'un 2% ( $\epsilon_L = 0.02$ ). Si la desigualtat (9.28) no es satisfà, es tornarà a resoldre el model MAPH amb una linealització de  $H_k^{(i)}$  calculada sobre  $[x^*]^k$ , obtenint-se un nou òptim  $[x^*]^{k+1}$ . S'estableix així el següent procés iteratiu de linealitzacions successives :

**Algorisme A9.1 :** Algorisme de resolució del model MAPH

**0 Inicialitzacions.**

**0.1** Definició de les equacions de xarxa del model MAPH.

**0.2** Càlcul d'un punt pseudofactible  $\tilde{x}$  amb NOXCB 9.0.

**0.3** Selecció del punt inicial  $[x^*]^0$ ;  $k := 1$ .

**0.4** Relaxació de la precisió d'òptim de NOXCB 9.0.

**1 Bucle principal.**

**1.5** Linealització  $k$ -èsima: definició del problema **(FNCL)** <sup>$k$</sup> .

Càlcul dels coeficients  $\lambda^k$  associats a  $[x^*]^{k-1}$ .

Càlcul la generació hidràulica màxima  $[\bar{H}_k^{(i)}]^k$  associada a  $[x^*]^{k-1}$ .

Definició de les constriccions a banda associades a  $\lambda^k$  i  $[\bar{H}_k^{(i)}]^k$ .

**1.6** Resolució de **(FNCL)** <sup>$k$</sup>  amb NOXCB 9.0 a partir de  $\tilde{x}$ : obtenció de  $[x^*]^k$ .

**1.7** Si es satisfà (9.28) llavors

Increment de la precisió d'òptim de NOXCB 9.0.

Resolució de **(FNCL)** <sup>$k$</sup>  amb NOXCB 9.0 iterant a partir de  $[x^*]^k$ .

**Acabament.**

altrament

$k := k + 1$ . Anada a **1.5** .

El punt  $x^0$  sobre el que es realitza la primera linealització hauria de ser, idealment, un punt de l'entorn de l'òptim  $x^*$  del problema MAPH que es vol resoldre. Com que  $x^*$  es desconeix, les opcions adoptades a la implementació són :

a) Linealitzar sobre el punt pseudofactible trobat a **0.2** .

b) Linealitzar sobre el punt  $[x^*]^0 = u_x$ , on  $u_x$  es el vector de capacitats dels arcs de la xarxa ampliada.

- 
- c) Linealitzar sobre un punt  $[x^*]^k$  corresponent a una execució anterior d'un model MAPH amb la mateixa XA que l'actual.

A l'opció a), la primera linealització es realitza amb un estat dels embassaments realista, doncs és factible respecte dels fites i equacions de xarxa de la XH. No obstant això, aquesta opció proporciona en alguns casos un problema inicial **(FNCL)**<sup>1</sup> amb un conjunt de constriccions a banda infactibles. La segona opció, tot i ser menys realista doncs es linealitza sobre un punt que, en general, serà infactible, representa una sobreestimació de la generació hidràulica, doncs es consideren embassaments a màxima capacitat i tots els arcs de turbinació a descàrrega màxima, fet que pot ajudar a definir un primer problema **(FNCL)**<sup>1</sup> factible. La tercera opció és la més desitjable, però implica haver resolt previament un model MAPH amb la mateixa XA.



# CAPÍTOL 10

## Resultats computacionals (II).

L'algorisme A9.1 de resolució del model MAPH presentat al capítol anterior ha estat implementat en codi FORTRAN, originant el paquet MAPHLI 2.2. Es presenten en aquest capítol els resultats computacionals obtinguts en la resolució amb MAPHLI 2.2 d'un conjunt de problemes Planificació Hidro-Tèrmica a curt termini. Primer es presentarà la bateria de problemes resolts. Després es descriurà amb detall les característiques d'un dels models resolts així com els resultats obtinguts, passant finalment a avaluar el procés proposat de linealitzacions successives mitjançant una comparació exhaustiva dels resultats obtinguts amb i sense linealització.

### 10.1 Descripció dels problemes.

Els models del tipus A (problemes A24, A48 i A168) corresponen a la conca hidrogràfica 1 descrites a les taules 10.2 a 10.4. Els models del tipus B (problemes B48 i B168) corresponen a una conca composta pels embassaments de les conques 1 i 2. Els problemes A24 a B16 s'han resolt sense xarxa de transmissió, mentre que els problemes B48x i B168x incorporen la xarxa de transmissió descrita a la figura 10.2 i la taula 10.6. Els models tipus C són els de major dimensió. No s'han inclòs les dades detallades d'aquests darrers models, però es troben a disposició de qui les vulgui consultar.

**Taula 10.1 :** Característiques dels models MAPH

Nom problema	Dimensió sistemes					Dimensió XA		
	Nr	Nu	Nm	Nb	Ni	arcs	nodes	S.C.
A24	3	4	-	-	24	648	163	72
A48	3	4	-	-	48	1248	313	144
A168	3	4	-	-	168	4536	1135	504
B48	6	4	-	-	48	1824	457	144
B168	6	4	-	-	168	6552	1639	504
B48x	6	4	6	5	48	2256	697	240
B168x	6	4	6	5	168	8064	2479	840
C48	9	8	19	12	48	4416	1346	528
C168	9	8	19	12	168	4416	1346	528

**Taula 10.2 :** Característiques dels sistemes hidràulics.

Conca 1	Max./Min. vol. (Hm <sup>3</sup> )	Aport. natural (m <sup>3</sup> /s)	Nom. de descarr.	Descarr. màx. (m <sup>3</sup> /s)
Conca 2				
Superior	1340.0 / 0.	25.0	2	320.0
Mitjà	136.0 / 0.	10.0	2	440.0
Inferior	160.0 / 0.	5.0	2	80.0
Superior	354.0 / 0.	2.5	2	60.0
Mitjà	160.0 / 0.	2.0	2	40.0
Inferior	2.0 / 2.0	1.0	2	20.0

**Taula 10.3 :** Coeficients de l'alçada equivalent.

Conca 1	Alçada equivalent : $h_k = s_{bk} + s_{lk}v_k + s_{qk}v_k^2 + s_{ck}v_k^3$			
	$s_{bk}$ (m)	$s_{lk}$ (m/Hm <sup>3</sup> )	$s_{qk}$ (m/Hm <sup>6</sup> )	$s_{ck}$ (m/Hm <sup>9</sup> )
Conca 2				
Superior	30.419	0.04159999	$-0.2248782 \cdot 10^{-4}$	$0.6412981 \cdot 10^{-8}$
Mitjà	19.00889	0.09927949	$-0.2611453 \cdot 10^{-3}$	$0.5281490 \cdot 10^{-6}$
Inferior	12.0	0.1169998	$-0.1938173 \cdot 10^{-3}$	$0.3095786 \cdot 10^{-6}$
Superior	40.5835	0.1914066	$-0.4302308 \cdot 10^{-3}$	$0.4850604 \cdot 10^{-6}$
Mitjà	12.0	0.1169998	$-0.1938173 \cdot 10^{-3}$	$0.3095786 \cdot 10^{-6}$
Inferior	79.0	0.0000000	0.0	0.0



Taula 10.4 : Eficiència de la generació hidràulica.

Conca 1	$\rho_0$ $\rho_d$	$\rho_{hd}$ $\rho_{hh}$	$\rho_h$ $\rho_{dd}$
Superior	-21311 $0.9329 \cdot 10^{-2}$	$0.45 \cdot 10^{-4}$ $-0.29 \cdot 10^{-3}$	$0.22762 \cdot 10^{-1}$ $-0.4 \cdot 10^{-4}$
Mitjà d1	0.4747001 $0.1784916 \cdot 10^{-2}$	$0.8457 \cdot 10^{-5}$ $-0.366578 \cdot 10^{-3}$	$0.2097465 \cdot 10^{-1}$ $-0.6605 \cdot 10^{-5}$
Mitjà d2	0.4870272 $0.2043037 \cdot 10^{-2}$	$-0.1577 \cdot 10^{-4}$ $-0.241173 \cdot 10^{-3}$	$0.1799337 \cdot 10^{-1}$ $-0.4698 \cdot 10^{-5}$
Inferior	0.4375 $0.1631482 \cdot 10^{-1}$	$-0.9919000 \cdot 10^{-5}$ $-0.3373160 \cdot 10^{-3}$	$0.1870877 \cdot 10^{-1}$ $-0.2753720 \cdot 10^{-3}$
Conca 2	$\rho_0$ $\rho_d$	$\rho_{hd}$ $\rho_{hh}$	$\rho_h$ $\rho_{dd}$
Superior	0.113 $0.1646975 \cdot 10^{-1}$	$0.1282310 \cdot 10^{-4}$ $-0.7491900 \cdot 10^{-4}$	$0.9884616 \cdot 10^{-2}$ $-0.7491900 \cdot 10^{-4}$
Mitjà	0.4375 $0.1631482 \cdot 10^{-1}$	$-0.9919000 \cdot 10^{-5}$ $-0.3373160 \cdot 10^{-3}$	$0.1870877 \cdot 10^{-1}$ $-0.2753720 \cdot 10^{-3}$
Inferior	0.2695 $0.7685262 \cdot 10^{-1}$	0.0 0.0	0.0 $-0.2258628 \cdot 10^{-2}$

Taula 10.5 : Unitats tèrmiques models A i B.

Unitat	$\bar{P}$	Taxa incr.	Cost de producció
	$\underline{P}$ (MW)	Taxa decr. (MW/min)	$c_l$ (Pts/MWh) $c_q$ (Pts/(MWh) <sup>2</sup> )
Th1	160.0	3.5	2121.5168
	80.0	3.5	9.639808
Th2	350.0	8.0	3173.0382
	100.0	8.0	0.833415
Th3	350.0	8.0	3228.7386
	100.0	8.0	0.848045
Th4	350.0	8.0	3152.0982
	100.0	8.0	0.827915

**Taula 10.6 :** Dades de la xarxa de transmissió models B.

Línia	kV	km	R ( $\Omega/\text{km}$ )	X ( $\Omega/\text{km}$ )	Capacitat (A)
$ln_1$	230	108.79	0.088	0.4654	900
$ln_2$	230	53.0	0.044	0.2327	1800
$ln_3$	230	108.79	0.088	0.4654	900
$ln_4$	230	18.45	0.044	0.2327	1800
$ln_5$	230	55.5	0.022	0.11635	3600
$ln_6$	230	31.8	0.176	0.9308	1800

**Taula 10.7 :** Càrrega prevista model B48x.

$(i)$	$L_1^{(i)}$ (MW)	$L_2^{(i)}$ (MW)	$(i)$	$L_1^{(i)}$ (MW)	$L_2^{(i)}$ (MW)	$(i)$	$L_1^{(i)}$ (MW)	$L_2^{(i)}$ (MW)
1	535.95	321.57	17	629.41	377.65	33	363.26	217.95
2	493.68	296.21	18	619.92	371.95	34	391.98	235.18
3	466.41	279.84	19	601.10	360.66	35	427.12	256.27
4	456.61	273.97	20	588.78	353.27	36	443.26	265.95
5	451.09	270.65	21	605.89	363.53	37	440.70	264.42
6	453.79	272.27	22	650.82	390.49	38	431.87	259.12
7	496.69	298.01	23	626.52	375.91	39	424.89	254.93
8	554.05	332.43	24	583.29	349.97	40	412.90	247.74
9	608.12	364.87	25	477.32	286.39	41	405.59	243.35
10	646.08	387.64	26	433.09	259.85	42	397.02	238.21
11	667.71	400.62	27	399.44	239.66	43	395.17	237.10
12	674.57	404.74	28	380.14	228.08	44	401.96	241.17
13	667.78	400.67	29	369.64	221.78	45	431.16	258.69
14	640.03	384.01	30	363.74	218.24	46	516.21	309.72
15	614.09	368.45	31	363.93	218.35	47	525.30	315.18
16	624.37	374.62	32	356.80	214.08	48	490.53	294.32

## 10.2 Resolució detallada d'un problema MAPH.

Les figures 10.1, 10.3 i 10.4 il·lustren els resultats del cas B48x. El sistema està format per dues conques hidrogràfiques amb tres embassaments en cascada a cada una d'elles ( $Nr = 2 \times 3 = 6$ ), que anomenarem “superior”, “mitjà” i “inferior”, quatre unitats tèrmiques ( $Nu=4$ ), una xarxa de transmissió de cinc barres ( $Nb = 5$ ), sis línies ( $Nm = 6$ ) i dos nusos de càrrega ( $Nl = 2$ ), dos cicles bàsics i 48 intervals horaris ( $Ni=48$ ).

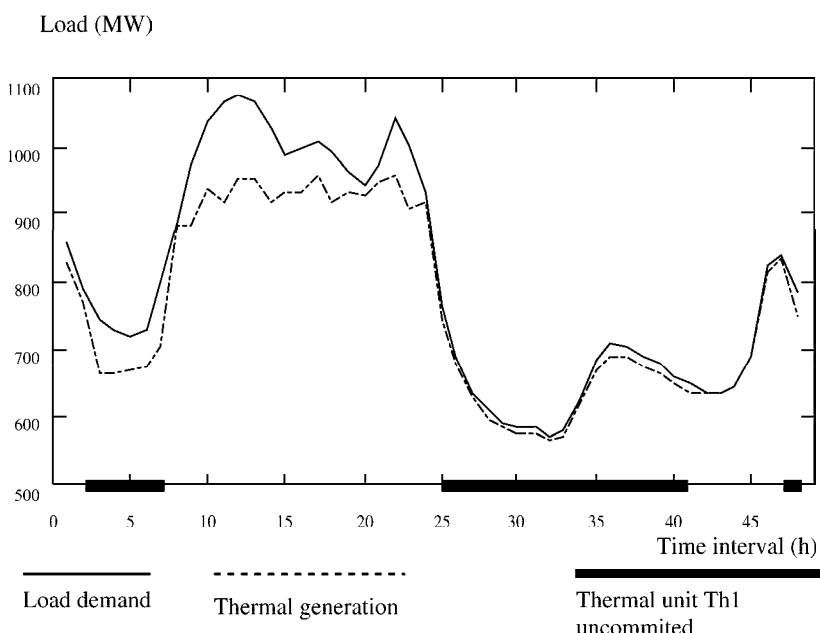
Les unitats tèrmiques Th1 i Th2 estan connectades al mateix nus, i passa el mateix amb les unitats Th3 i Th4. La generació hidràulica de tot el sistema hidràulic s'injecta a un altre nus. La xarxa amplida resultant té 2256 arcs (variables), 697 nusos (equacions de balanç), i  $48 \times (3 + 2) = 240$  constriccions a banda.

La unitat tèrmica Th1 està desconnectada durant els intervals 2 al 7, 25 al 41 i als intervals 47 i 48. Les unitats tèrmiques Th2, Th3 i Th4 estan actives durant tot el període. La constricció de reserva incremental té un temps de resposta de  $t_{ISR} = 7\text{min}$  i un requeriment de  $R_I = 450$  MW per a tots els intervals. Les constriccions de reserva decremental tenen un temps de resposta de  $t_{DSR} = 5\text{min}$  i un requeriment igual al 15% de la càrrega prevista ( $R_D^{(i)} = .15 \times (L_1^{(i)} + L_2^{(i)})$ ). Els volums inicial i final dels embassaments coincideixen i s'ha fixat a 3/4 de la màxima capacitat ( $v_k^{(0)} = 3\bar{v}_k/4, v_k^{(48)} \geq 3\bar{v}_k/4, k = 1, \dots, 5$ ) excepte per l'embassament inferior de la conca 2, que s'ha mantingut constant i igual al volum màxim ( $v_6^{(i)} = \bar{v}_k, \forall i$ ).

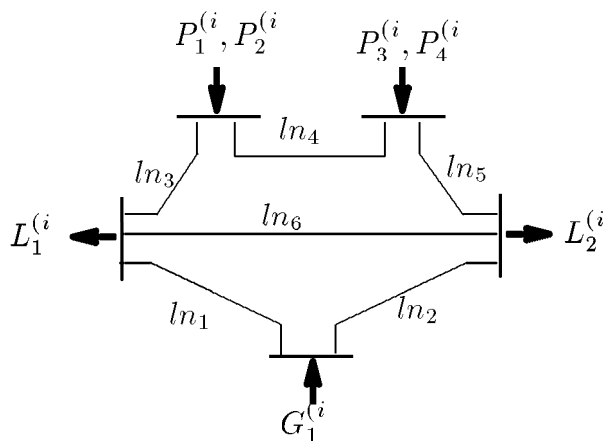
El primer punt usat pel càlcul dels coeficients de la linealització de la generació hidràulica i del seu valor màxim, necessari per a les constriccions de reserva incremental, té els volums fixats a la seva capacitat màxima i les descàrregues amb el valor que maximitza la generació. L'òptim obtingut després de tres linealitzacions té un valor de la generació hidràulica linealitzada amb un error  $\epsilon_L$  per sota del 1.3% de la càrrega a cada interval, és a dir :

$$|H_k^{(i)} - H_{l,k}^{(i)}| \leq 0.013(L_1^{(i)} + L_2^{(i)}) \quad i = 1, \dots, Ni$$

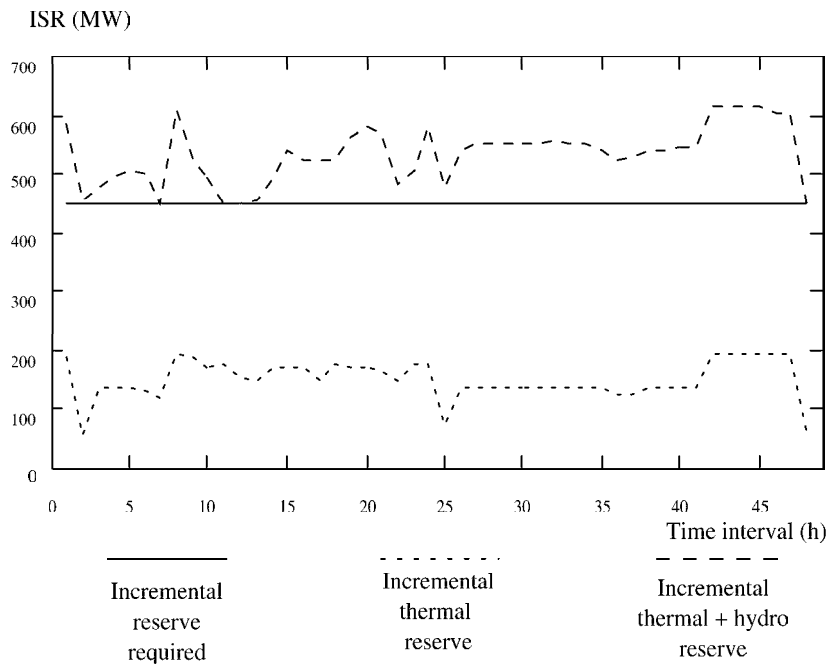
Els requeriment de càrrega es satisfan amb un error màxim del 1.3% de la càrrega prevista (que es produeix a l'interval 4), i les constriccions ISR i DSR també són satisfetes (figures 10.3 i 10.4). El temps total d'execució va ésser de 49.5 segons de temps de CPU. S'ha de fer notar que l'alt valor de la generació hidràulica entre els intervals 2 al 7 es deu a que la tèrmica Th1 està desconnectada. Les constriccions ISR actives corresponen als intervals 7,11,12 i 48, mentre que les constriccions DSR actives corresponen als intervals 24 al 41, 2, 8, 20 i 21. La línia  $ln_3$  està saturada als intervals 12, 13, 17 i 22, com es pot observar a la figura 10.5.



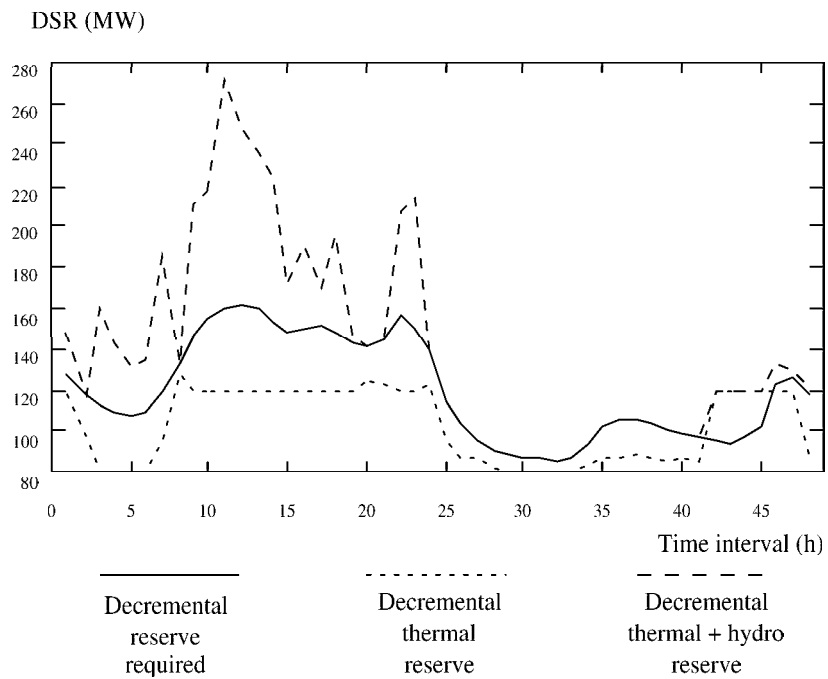
**Figura 10.1 :** Cobriment de la càrrega a l'òptim del problema B48x.



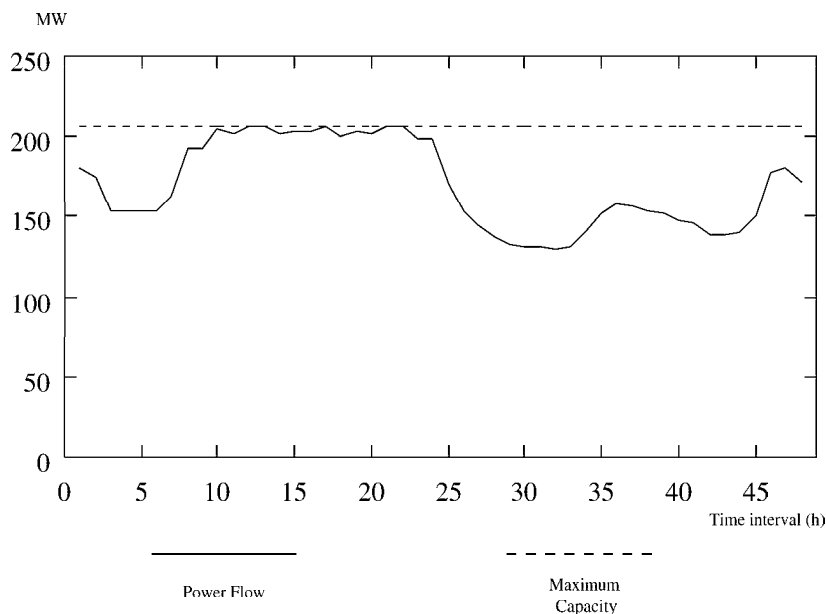
**Figura 10.2 :** Xarxa de transmissió pel problema B48x.



**Figura 10.3 :** Reserva incremental a l'òptim del problema B48x.



**Figura 10.4 :** Reserva decremental a l'òptim del problema B48x.



**Figura 10.5 :** Flux de potència línia  $ln_3$ .

### 10.3 Resultats computacionals.

Els mateixos models resolts amb MAPHLI 2.2 han estat resolts amb el paquet MINOS 5.3. A diferència de la resolució amb MAPHLI 2.2, amb MINOS 5.3 no s'ha linealitzat la generació hidràulica, de forma que a les equacions (9.14), (9.26) i (9.27) del model MAPH s'usa l'expressió exacta  $H_k^{(i)} = \mu \rho_k^{(i)} h_k^{(i)} d_k^{(i)}$  que té en compte (8.4) i (8.7), en lloc de la seva linealització  $\lambda_{0k}^{(i)} + \lambda_{v(i-1)k}^{(i)} v_k^{(i-1)} + \lambda_{v(i)k}^{(i)} v_k^{(i)} + \lambda_{dk}^{(i)} d_k^{(i)}$ .

Els resultats obtinguts es mostren a la taula 10.8, on es poden comparar els valors de la funció objectiu i els temps d'execució de MINOS 5.3 i MAPHLI 2.2. El propòsit de la taula 10.8 no és comparar la eficiència dels dos codis, doncs MAPHLI 2.2 i MINOS 5.3 estan resolent diferents formulacions del mateix problema, amb i sense linealització de la funció de generació respectivament. Per contra, la taula 10.8 permet avaluar la conveniència, en termes de temps d'execució i de la precisió de la solució, d'usar una formulació lineal aproximada, que proporciona millors temps d'execució i valors realistes de la funció de costos però a costa d'obtenir solucions que poden violar les constriccions de càrrega i reserva fins a un error màxim  $\epsilon_L$  fixat per l'usuari.

Taula 10.8 : Resultats computacionals models MAPH.

Nom problema	error max. gen. hid.	nombre linealit..	CPU (s)		Cost ( $10^6$ Pts)	
			NO.	MI.	NO.	MI.
A24	$\leq 0.7\%$	3	14.7	38.7	73.10	73.15
A48	$\leq 1.1\%$	3	39.2	219.6	124.23	124.39
A168	$\leq 1.4\%$	3	623.5	6530.7	361.82	362.16
B48	$\leq 0.9\%$	3	31.2	514.3	123.07	123.19
B168	$\leq 1.5\%$	2	336.2	6667.8	361.30	361.62
B48x	$\leq 1.3\%$	3	49.5	394.1	132.15	132.34
B168x	$\leq 1.4\%$	2	538.4	4963.2	384.40	384.54
C48	$\leq 1.5\%$	2	337.6	6020.1	199.32	199.47

## 10.4 No convexitat del problema.

El model acoblat que s'ha desenvolupat, amb linealització de la generació tèrmica, consisteix en la minimització de (9.20) o (9.21) subjecte a un conjunt de constriccions lineals. Si es considera la funció de generació hidràulica exacta (no lineal), algunes constriccions són no lineals, i d'aquestes, algunes seran no convexes (es pot comprovar a (9.27) que a la constricció ISR apareix  $-H_k^{(i)}$ , mentre que a la constricció DSR apareix  $+H_k^{(i)}$ , sent una de les dos no convexa). Malgrat això, l'experiència computacional indica que els efectes de la no convexitat no són importants, ja que els resultats obtinguts amb el codi MAPHLI 2.2, que resol una versió "convexificada" del problema, és molt similar a la que s'obté amb MINOS 5.3 resolent el problema real no convex.

## 10.5 Conclusions.

Les conclusions que es poden extreure dels resultats presentats a les seccions anteriors són :

- 1.- La linealització de la generació hidràulica usada és adequada : La implementació MAPHLI 2.2 redueix l'error  $\epsilon_L$  per sota d'un 1.5% ( $\epsilon_L = 0.015$ ) en 2-3 linealitzacions en tots els casos probats.
- 2.- L'algorisme A9.1 és computacionalment eficient : El temps d'execució dels problemes amb el paquet MAPHLI 2.2 (generació hidràulica linealitzada) és un 9%, en promig, del temps de resolució amb MINOS 5.3 (generació hidràulica exacta).
- 3.- La resolució del model MAPH amb l'algorisme A9.1 és suficientment precisa : La discrepància entre el valor del cost òptim trobat per MAPHLI 2.2 i MINOS 5.3 és d'un 0.091% en promig.



# CAPÍTOL 11

## Conclusions i línies futures de recerca.

### 11.1 Conclusions.

Les conclusions que resumeixen el treball desenvolupat i els resultats obtinguts al llarg dels diferents capítols d'aquesta tesi són :

- 1.- Disseny d'un algorisme especialitzat (cap. 4) : S'ha fet un estudi detallat de l'especialització de l'algorisme del conjunt de constriccions actives A3.1 per a la resolució del problema (FNCL). S'han desenvolupat algorismes de càlcul que resolen les operacions amb les matrius  $B$  i  $Z$  presents a A3.1 amb i sense l'ús de les estructures de cicles (secció 4.2), desenvolupant les expressions (4.41) que permeten comparar el cost computacional de les dues alternatives.
- 2.- Implementació de l'algorisme especialitzat (cap. 5) : S'ha descrit amb detall la implementació de les passes de l'algorisme A3.1 que ha donat lloc al codi NOXCB 9.0. S'ha proposat un nou mètode pel càlcul de solucions inicials factibles (secció 5.1). S'han descrit i justificat els mètodes de càlcul de les direccions de descens (secció 5.2.2), l'estratègia d'identificació d'òptims del subproblema (SN $\bar{M}$ ) (secció 5.2.3) i els mètodes de taxació i identificació d'òptims del problema (FNCL) (secció 5.3). Finalment s'ha proposat i justificat el tractament especial dispensat a les folgues (secció 5.4).
- 3.- Avaluació computacional de la implementació NOXCB 9.0 (cap. 6) : S'ha descrit les característiques i procés de generació de la col·lecció EIO/UPC consistent en 105 problemes (FNCL). S'ha usat aquesta col·lecció per avaluar el grau d'eficiència del codi

NOXCB 9.0 en comparació amb el codi no especialitzat MINOS 5.3 (seccions 6.3.1), la influència de les característiques dels problemes (**FNCL**) en el grau d'eficiència (secció 6.3.2) i per avaluar l'eficiència relativa de certes variants algorísmiques (6.3.3). Les proves realitzades han mostrat que NOXCB 9.0 és capaç de resoldre satisfactòriament models de petita i gran escala de característiques molt diverses proporcionant reduccions del temps d'execució d'un 77% en promig respecte dels temps d'execució obtinguts amb MINOS 5.3.

- 4.- Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica (cap. 9) : S'ha desenvolupat un nou model de resolució del problema de Planificació Hidro-Tèrmica consistent en la seva formulació com un problema de fluxos en xarxes no lineals amb constriccions a banda lineals i no lineals. Les equacions de xarxa corresponen a l'anomenada *xarxa ampliada* (secció 9.3), una xarxa única que descriu simultàniament el parc hidràulic el parc tèrmic i la xarxa de transmissió. El desenvolupament de la xarxa ampliada es basa en el concepte de *xarxa tèrmica equivalent* (secció 9.1.1) que permet descriure l'estat de les unitats tèrmiques mitjançant un model de fluxos en xarxes.
- 5.- Algorisme de resolució del MAPH : S'ha proposat un algorisme de resolució del model MAPH (A9.1) consistent en la resolució amb NOXCB 9.0 d'un conjunt de problemes (**FNCL**) provinents de la linealització de les constriccions a banda no lineals del model MAPH (seccions 8.3 i 9.6). La implementació de l'algorisme A9.1 ha donat lloc al codi MAPHLI 2.2.
- 6.- Avaluació computacional de l'algorisme (cap. 10) : S'ha avaluat computacionalment l'algorisme A9.1 mitjançant la resolució amb el codi MAPHLI 2.2 d'un conjunt de problemes de Planificació Hidro-Tèrmica. Els resultats obtinguts s'han comparat amb els corresponents als mateixos problemes sense linealitzar resolts amb MINOS 5.3. Els resultats mostren que el mètode proposat resol satisfactòriament els models MAPH. MAPHLI 2.2 aconsegueix una reducció promig d'un 91% del temps d'execució amb una discrepància del valor de la funció objectiu a l'òptim per sota d'un 0.091% en promig (secció 10.3).

## 11.2 Línies futures de recerca.

### 11.2.1 Fluxos no lineals amb constriccions a banda no lineals.

Es té prevista la ampliació de l'algorisme presentat al tractament de constriccions a banda no lineals mitjançant un mètode de Lagrangians projectats com el descrit a [60]. Aquest mètode permet resoldre el problema no lineal :

$$\begin{aligned}
 & \min. && f(x) \\
 \text{subj. a:} && Ax = b \\
 && h(x) = r \\
 && 0 \leq x \leq u
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

mitjançant la resolució d'un conjunt de problemes amb una linealització de les constriccions  $h(x)$  sobre el punt  $x_k$  :

$$h(x) \approx h_k(x) = h(x_k) + J_k(x - x_k)$$

on  $J_k$  és el Jacobià de  $h(x)$  a  $x_k$ . El problema linealitzat que s'obté és :

$$\begin{aligned}
 \min & f(x) - \lambda_k'(h(x) - h_k(x)) + \frac{1}{2}\rho(h(x) - h_k(x))'(h(x) - h_k(x)) \\
 \text{subj. a:} & Ax = b \\
 & J_k x = r - h(x_k) + J_k x_k \\
 & 0 \leq x \leq u
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

La funció objectiu de (11.2) és un *Lagrangià augmentat* modificat on  $h(x) - h_k(x)$  és usat en substitució de l'habitual terme de violació de les constriccions  $h(x) - r$ .  $\lambda_k$  és una estimació al punt  $x_k$  dels multiplicadors de Lagrange de les constriccions no lineals i  $\frac{1}{2}\rho(h(x) - h_k(x))'(h(x) - h_k(x))$  és la *funció de penalització quadràtica*, amb paràmetre de penalització  $\rho$ . Si la matriu  $A$  representa la matriu d'incidències nusos-arcs d'una xarxa, el problema (11.2) és un problema **(FNCL)** que pot ser resolt mitjançant les rutines del

codi NOXCB 9.0, sent, doncs, aquesta una ampliació natural dels mètodes desenvolupats a aquesta tesi.

### 11.2.2 Model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica.

El model MAPH presentat pot ser ampliat fàcilment amb qualsevol tipus de constricció addicional amb l'addició de noves constriccions a banda. Per exemple, es prodrien afegir *constriccions d'emissió* que limitessin la quantitat d'agents contaminants emesos a l'atmosfera per les unitats tèrmiques. Aquestes constriccions s'acostumen a formular com a funcions lineals o quadràtiques de la potència generada, i sovint els coeficients són els mateixos usats en les corbes de cost de les unitats tèrmiques [77]. El model MAPH permet incloure qualsevol tipus de constriccions d'emissió, ja sigui un límit a l'emissió conjunta de totes les tèrmiques al llarg del període d'estudi o només dins d'un interval, o limitant les emissions de certes tèrmiques dins de certs intervals.

S'està treballant actualment en una extensió del model MAPH que permet considerar *constriccions de seguretat*. Aquestes constriccions de seguretat intenten satisfer que els programes de generació de les unitats tèrmiques i hidràuliques puguin fer front a la fallida d'una línia o d'un parell de línies simultàniament. Això s'aconsegueix mitjançant l'ampliació de les xarxes XTE<sup>(i)</sup> amb una sèrie de rèpliques on s'ha suprimit les línies afectades i l'addició d'un conjunt de constriccions a banda auxiliars.

Finalment comentar que el codi MAPHLI 2.2 està preparat per ser usat dins d'un esquema general de resolució del problema de Coordinació Hidro-Tèrmica a Curt Termini. Quan es vol optimitzar l'estat apagat/engegat de les unitats tèrmiques tenint en compte els temps mínims d'aturada i funcionament, s'obté un problema d'optimització no lineal mixte de gran escala. Malgrat que aquest problema s'ha intentat abordar per diferents vies (programació dinàmica [71], Branch& Bound [53], Xarxes Neuronals [69]), la tècnica de la *Relaxació Lagrangiana* ha estat la més usada [3,38,54,57,67,74,75,77]. Aquest és un procés descentralitzat on, a la iteració  $k$ , es resol un conjunt de subproblemes tèrmics independents per tal de trobar la millor política d'aturades/engegades respecte d'una funció objectiu que inclou una estimació del preu del MW de càrrega i reserva rodant a cada interval, que no és més que els multiplicadors de Lagrange de les constriccions de càrrega i reserva.

Aquest és l'anomenat "decentralized level". Al "master level" s'actualitza l'estimació dels multiplicadors de Lagrange mitjançant tècniques subgradient [57], usualment combinades amb despatxament òptim de les unitats tèrmiques actives a la darrera solució òptima del nivell descentralitzat [75,67]. Els darrers treballs [38,77] han incorporat la tècnica de la *Relaxació Lagrangiana Augmentada* presentada a [3], que elimina el conegut problema de l'excessiva sensibilitat de la solució a petites pertorbacions dels multiplicadors de Lagrange. Un problema dels models existents és que, malgrat que el problema de despatxament òptim a ser resolt dins del problema de Coordinació Hidro-Tèrmica és un problema de Planificació Hidro-Tèrmica, s'acostuma a ometre el sistema hidràulic, o la xarxa de transmissió, o tots dos. Algunes aproximacions a la inclusió del sistema hidràulic mitjançant models de Planificació Hidro-Tèrmica desacoblats sense la xarxa de transmissió es poden trobar a [54,74,76,38]. La xarxa de transmissió ha estat considerada a [77] mitjançant un model de corrent continu. L'ús del model Acoblat de Planificació Hidro-Tèrmica presentat a aquesta tesi dins de l'esquema de la Relaxació Lagrangiana Augmentada ompliria aquest buit.



## APÈNDIX AP1

### Coeficients de l'aproximació lineal de la generació hidràulica.

A partir de (8.3), (8.6) i (8.7) desenvolupant (8.3) al voltant d'un punt factible  $v_{Fk}^{(i-1)}$ ,  $v_{Fk}^{(i)}$ ,  $d_{Fk}^{(i)}$ , amb generació  $H_{Fk}^{(i)}$ , fins als termes de primer ordre s'obté:

$$H_k^{(i)} \approx H_{Fk}^{(i)} + \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i-1)}} \right|_F (v_k^{(i-1)} - v_{Fk}^{(i-1)}) + \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i)}} \right|_F (v_k^{(i)} - v_{Fk}^{(i)}) + \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial d_k^{(i)}} \right|_F (d_k^{(i)} - d_{Fk}^{(i)})$$

llavors

$$\lambda_{0k}^{(i)} = H_{Fk}^{(i)} - \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i-1)}} \right|_F v_{Fk}^{(i-1)} - \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i)}} \right|_F v_{Fk}^{(i)} - \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial d_k^{(i)}} \right|_F d_{Fk}^{(i)}$$

amb

$$H_{Fk}^{(i)} = \mu \rho_{Fk}^{(i)} h_{Fk}^{(i)} d_{Fk}^{(i)}$$

on

$$\begin{aligned} h_{Fk}^{(i)} &= s_{bk} + \frac{s_{lk}}{2} (v_{Fk}^{(i-1)} + v_{Fk}^{(i)}) + \frac{s_{qk}}{3} (v_{Fk}^{(i)} - v_{Fk}^{(i-1)})^2 + s_{qk} v_{Fk}^{(i-1)} v_{Fk}^{(i)} + \\ &\quad + \frac{s_{ck}}{4} [(v_{Fk}^{(i-1)})^2 + (v_{Fk}^{(i)})^2] (v_{Fk}^{(i-1)} + v_{Fk}^{(i)}) \\ \rho_{Fk}^{(i)} &= \rho_{k0} + \rho_{kh} h_{Fk}^{(i)} + \rho_{kd} d_{Fk}^{(i)} + \rho_{khd} h_{Fk}^{(i)} d_{Fk}^{(i)} + \rho_{khh} (h_{Fk}^{(i)})^2 + \rho_{kdd} (d_{Fk}^{(i)})^2 \\ \lambda_{v^{(i-1)k}}^{(i)} &= \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i-1)}} \right|_F = \mu [\rho_{Fk}^{(i)} + \rho_{kh} h_{Fk}^{(i)} + \rho_{khd} h_{Fk}^{(i)} d_{Fk}^{(i)} + 2\rho_{khh} (h_{Fk}^{(i)})^2] d_{Fk}^{(i)} \left[ \frac{s_{lk}}{2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2s_{qk}}{3} (v_{Fk}^{(i)} - v_{Fk}^{(i-1)}) + s_{qk} v_{Fk}^{(i)} + \frac{s_{ck}}{4} \left\{ (v_{Fk}^{(i)})^2 + 2v_{Fk}^{(i-1)} v_{Fk}^{(i)} + 3(v_{Fk}^{(i-1)})^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\lambda_{v^{(i)k}}^{(i)} = \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial v_k^{(i)}} \right|_F = \mu [\rho_{Fk}^{(i)} + \rho_{kh} h_{Fk}^{(i)} + \rho_{khd} h_{Fk}^{(i)} d_{Fk}^{(i)} + 2\rho_{khh} (h_{Fk}^{(i)})^2] d_{Fk}^{(i)} \left[ \frac{s_{lk}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2s_{qk}}{3} (v_{Fk}^{(i)} - v_{Fk}^{(i-1)}) + s_{qk} v_{Fk}^{(i-1)} + \frac{s_{ck}}{4} \left\{ (v_{Fk}^{(i-1)})^2 + 2v_{Fk}^{(i-1)} v_{Fk}^{(i)} + 3(v_{Fk}^{(i)})^2 \right\} \right] \\ \lambda_{dk}^{(i)} = \left. \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial d_k^{(i)}} \right|_F = \mu [\rho_{kd} + \rho_{khd} h_{Fk}^{(i)} + 2\rho_{kdd} d_{Fk}^{(i)}] h_{Fk}^{(i)} d_{Fk}^{(i)} + \mu \rho_{Fk}^{(i)} h_{Fk}^{(i)}$$



## APÈNDIX AP2

### Taules de resultats computacionals de MINOS 5.3 i NOXCB 9.0.

Les taules de les planes que venen a continuació contenen els resultats computacionals detallats de la col·lecció de problemes EIO/UPC. Per cada problema n'hi ha dues files, la primera corresponent als resultats amb NOXCB 9.0 i la segona corresponent als resultats obtinguts amb MINOS 5.3. La interpretació de cada columna s'indica a continuació :

$it_{01}$  : nombre d'iteracions de les fases 0 i 1 de NOXCB 9.0 i de la fase 1 per a MINOS 5.3.

$it_2$  : nombre d'iteracions de la fase 2.

$f(x^0)$  : valor de la funció objectiu al començament de la fase 2.

$f(x^*)$  : valor de la funció objectiu a l'òptim.

$t_{01}$  : temps de càlcul d'un punt inicial factible (en segons). Correspon a la fase 1 de MINOS 5.3 i a les fases 0 i 1 de NOXCB 9.0.

$t_2, t$  : temps d'execució de la fase 2 i temps total d'execució.

Prec. : indica la precisió amb la que s'ha resolt el problema, i correspon a l'expressió :  $\max\{\bar{\sigma}, \|g_z^*\|_\infty\} / \theta(\pi^k)$  on  $\bar{\sigma}$  coincideix amb el mateix símbol de l'algorisme A5.4, sent el màxim valor absolut dels multiplicadors de Lagrange  $\sigma$  que violen (5.26) .

$\#f(x)$  : nombre d'avaluacions de la funció objectiu.

$s^*$  : nombre de variables superbàsiques a l'òptim.

$c_x^*$  : nombre d'arcs clau a l'òptim.

**Taula A2.1 :** Resultats model 10 rmfa.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	t <sub>01</sub>	t <sub>2</sub>	t.	Prec.	# $f(x)$	s*	C <sub>x</sub> *
<b>1111</b>	NO	501	2542	8.0D+06	121.823	0.22	155.50	155.72	1.2D-07	9699	705	1
	MI	3	2598	1.1D+07	121.823	0.03	348.48	348.51	5.2D-08	5788	705	
<b>2111</b>	NO	501	2564	8.0D+06	121.803	0.22	157.22	157.44	4.3D-07	9633	701	2
	MI	4	2320	1.3D+07	121.803	0.03	333.67	333.70	8.5D-08	5336	701	
<b>3111</b>	NO	501	2561	8.0D+06	121.993	0.24	156.13	156.37	2.4D-07	9550	692	6
	MI	3	2634	1.1D+07	121.993	0.02	327.70	327.72	4.4D-08	5862	692	
<b>4111</b>	NO	519	2605	1.1D+07	123.099	0.29	159.18	159.47	4.9D-07	8902	666	24
	MI	3	2479	1.3D+07	123.099	0.05	282.58	282.63	9.6D-08	5450	666	
<b>5111</b>	NO	501	2667	8.0D+06	123.784	0.30	165.23	165.53	5.6D-07	8880	651	34
	MI	8	2490	1.2D+07	123.784	0.12	276.95	277.07	1.1D-07	5443	651	
<b>3211</b>	NO	642	2686	2.0D+07	184.979	0.52	70.22	70.74	3.1D-07	5421	384	27
	MI	6	1744	1.1D+07	184.979	0.05	65.37	65.42	2.7D-07	3640	384	
<b>3311</b>	NO	819	3308	8.5D+06	160.157	1.27	66.95	68.22	3.4D-07	6820	286	12
	MI	460	2098	2.4D+03	160.157	4.28	59.57	63.85	1.0D-07	4209	286	
<b>3221</b>	NO	682	2642	2.0D+06	758.122	0.69	145.60	146.29	4.0D-07	6755	537	5
	MI	306	2535	3.1D+08	758.122	2.25	174.62	176.87	1.5D-07	5771	537	
<b>3241</b>	NO	1422	4675	4.7D+09	3970.363	2.70	187.08	189.78	9.6D-07	13411	461	36
	MI	930	2715	4.1D+07	3970.363	7.50	134.50	142.00	1.3D-08	6249	461	
<b>3231</b>	NO	1028	3513	2.1D+05	1673.002	1.50	172.87	174.37	4.5D-07	8642	500	20
	MI	449	2929	2.5D+06	1673.002	3.37	175.28	178.65	1.8D-08	6605	500	
<b>2112</b>	NO	501	2567	8.0D+06	121.803	0.20	150.02	150.22	5.2D-07	9701	701	2
	MI	4	2314	1.3D+07	121.803	0.03	309.40	309.43	6.6D-08	5319	701	
<b>3132</b>	NO	501	2532	8.0D+06	121.993	0.24	156.62	156.86	1.9D-07	9543	692	6
	MI	3	2537	1.1D+07	121.993	0.03	302.60	302.63	5.8D-08	5716	692	
<b>3232</b>	NO	855	4050	1.0D+07	212.040	0.87	106.87	107.74	2.5D-07	8391	385	33
	MI	446	2214	3.1D+04	205.771	3.47	74.90	78.37	4.9D-07	4443	376	

Taula A2.2 : Resultats model 20 rma.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1111</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.30	0.22	0.52	0.0D+00	4	0	0
	MI	3	497	1.4D+06	589140.000	0.03	4.68	4.71	0.0D+00	512	0	
<b>2111</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.30	0.22	0.52	0.0D+00	4	0	0
	MI	4	454	1.4D+06	589140.000	0.03	4.32	4.35	0.0D+00	466	0	
<b>3111</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.29	0.22	0.51	0.0D+00	4	0	0
	MI	3	530	1.4D+06	589140.000	0.05	5.10	5.15	0.0D+00	542	0	
<b>4111</b>	NO	519	175	8.0D+05	589140.000	0.41	0.62	1.03	0.0D+00	11	0	0
	MI	3	512	1.4D+06	589140.000	0.05	5.73	5.78	0.0D+00	524	0	
<b>5111</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.50	0.48	0.98	0.0D+00	4	0	0
	MI	8	358	1.4D+06	589140.000	0.10	4.53	4.63	0.0D+00	368	0	
<b>3211</b>	NO	642	291	7.3D+05	589140.000	0.57	0.77	1.34	0.0D+00	11	0	1
	MI	6	739	1.4D+06	589140.000	0.05	7.67	7.72	0.0D+00	754	0	
<b>3311</b>	NO	732	478	6.7D+05	589140.000	1.02	1.82	2.84	0.0D+00	13	0	1
	MI	834	3980	1.0D+06	589140.000	7.47	50.52	57.99	0.0D+00	4026	0	
<b>3221</b>	NO	642	306	7.3D+05	589140.000	0.55	0.80	1.35	0.0D+00	10	0	2
	MI	17	877	1.4D+06	589140.000	0.12	9.40	9.52	0.0D+00	894	0	
<b>3231</b>	NO	727	631	1.0D+06	589140.800	0.77	1.83	2.60	0.0D+00	25	0	18
	MI	218	2577	2.1D+06	589140.700	1.62	28.72	30.34	0.0D+00	2617	0	
<b>3241</b>	NO	1019	4394	6.3D+05	589141.400	1.52	14.17	15.69	0.0D+00	125	0	35
	MI	932	9767	2.5D+06	589141.300	7.47	114.40	121.87	0.0D+00	9774	0	
<b>2112</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.30	0.22	0.52	0.0D+00	4	0	0
	MI	4	454	1.4D+06	589140.000	0.03	4.35	4.38	0.0D+00	466	0	
<b>3132</b>	NO	501	78	6.0D+05	589140.000	0.30	0.23	0.53	0.0D+00	4	0	0
	MI	3	503	1.4D+06	589140.000	0.03	4.88	4.91	0.0D+00	517	0	

**Taula A2.3 :** Resultats model 22 rmfa.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1111</b>	NO	501	573	2.5D+04	9658.353	0.25	6.58	6.83	5.1D-07	737	68	0
	MI	3	368	4.2D+04	9658.353	0.05	5.45	5.50	8.7D-08	425	68	
<b>2111</b>	NO	501	617	2.5D+04	9669.441	0.22	7.12	7.34	9.3D-07	792	68	1
	MI	4	363	4.4D+04	9669.441	0.05	5.32	5.37	4.1D-08	408	68	
<b>3111</b>	NO	501	589	2.5D+04	9675.037	0.22	7.03	7.25	6.3D-07	768	70	1
	MI	3	391	4.2D+04	9675.037	0.05	5.82	5.87	7.2D-08	435	70	
<b>4111</b>	NO	533	713	2.5D+04	9718.983	0.38	9.02	9.40	8.3D-08	881	62	7
	MI	3	358	4.2D+04	9718.983	0.07	5.82	5.89	4.3D-08	386	62	
<b>5111</b>	NO	501	605	2.5D+04	9716.037	0.45	8.65	9.10	3.2D-07	731	67	7
	MI	8	413	4.4D+04	9716.037	0.12	7.93	8.05	2.2D-07	496	67	
<b>3211</b>	NO	714	1052	3.4D+04	11425.150	0.88	9.60	10.48	7.0D-07	856	56	20
	MI	6	594	4.4D+04	11425.140	0.08	8.85	8.93	2.9D-08	579	56	
<b>3311</b>	NO	1105	1284	2.3D+04	11166.570	2.98	17.65	20.63	5.1D-07	1644	55	11
	MI	834	990	1.7D+04	11166.570	9.73	19.42	29.15	2.2D-13	1212	55	
<b>3221</b>	NO	706	1150	4.4D+04	11425.340	0.85	11.58	12.43	1.4D-07	1062	56	21
	MI	17	564	4.4D+04	11425.340	0.17	7.93	8.10	6.9D-08	489	56	
<b>3231</b>	NO	873	1437	4.1D+04	12557.620	1.41	14.35	15.76	1.3D-07	1317	65	30
	MI	218	1031	4.7D+04	12557.610	1.97	17.13	19.10	1.7D-08	1146	65	
<b>3241</b>	NO	1324	1908	4.0D+04	13913.220	2.91	15.70	18.61	1.0D-10	1150	50	36
	MI	932	1796	5.3D+04	13913.220	9.27	31.03	40.30	4.7D-10	1879	50	
<b>2112</b>	NO	501	623	2.5D+04	9669.441	0.21	7.12	7.33	4.2D-08	759	68	1
	MI	4	391	4.4D+04	9669.441	0.05	5.58	5.63	2.0D-07	422	68	
<b>3132</b>	NO	501	577	2.5D+04	9675.037	0.23	6.77	7.00	2.7D-07	726	70	2
	MI	3	377	4.2D+04	9675.037	0.03	5.68	5.71	2.6D-08	436	70	
<b>3232</b>	NO	1131	1393	3.3D+04	12560.350	2.09	14.05	16.14	6.0D-08	1265	61	29
	MI	446	1127	6.6D+04	12560.350	4.22	18.83	23.05	6.3D-10	1208	61	

Taula A2.4 : Resultats model 10 rmbf.

	it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1111</b> NO	501	7663	9.1D+03	18.826	0.41	2402.43	2402.84	7.4D-07	82281	3352	6
MI	(1)										
<b>3111</b> NO	501	7766	9.1D+03	18.866	0.40	2375.43	2375.83	8.4D-07	81847	3256	42
MI	(2)										
<b>4111</b> NO	618	7717	2.2D+04	19.497	1.53	2487.65	2489.18	8.1D-07	78783	2905	190
MI	(3)										
<b>5111</b> NO	577	8309	4.1D+02	19.674	1.95	2413.92	2415.87	2.0D-07	71263	2460	347
MI	1	9133	2.0D+03	19.674	0.15	17538.02	17538.17	7.0D-08	18236	2460	
<b>3211</b> NO	4617	18749	1.2D+06	1236.949	17.81	3744.90	3762.71	9.4D-07	119692	1203	56
MI	7330	15617	4.7D+07	1236.949	229.12	3858.55	4087.67	8.0D-08	28254	1209	
<b>3311</b> NO	4256	14278	1.3D+06	1167.015	19.50	3099.48	3118.98	9.3D-07	72372	1313	16
MI	3941	17532	4.8D+03	1167.015	149.83	9895.45	10045.28	1.8D-08	34282	1322	
<b>3221</b> NO	4933	21249	1.7D+06	1250.092	24.45	5360.53	5384.98	9.0D-07	169490	1245	63
MI	12358	15302	4.5D+06	1250.096	415.83	4573.10	4988.93	1.8D-08	28455	1248	

(1) : es va abortar l'execució amb  $t=22861.7$ sec. i  $f(x)=18.8271$ .

(2) : es va abortar l'execució amb  $t=23274.1$ sec. i  $f(x)=18.8674$ .

(3) : es va abortar l'execució amb  $t=22717.4$ sec. i  $f(x)=18.9497$ .

En tots tres casos es va haver d'abortar l'execució degut a que el model ocupava més de 50Mb de memòria principal (degut a l'espai reservat per als factors de Cholesky de l'aproximació quasi-Newton de l'Hessià projectat) i el sistema ( de 32Mb de memòria RAM i 32Mb mapejats a disc) va quedar col·lapsat.

Taula A2.5 : Resultats model 20 rmbf.

	it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1111</b> NO	501	1906	6.3D+05	398692.000	0.47	12.98	13.45	0.0D+00	8	0	0
MI	0	1834	7.2D+05	398692.000	0.05	63.00	63.05	0.0D+00	1861	0	
<b>3111</b> NO	501	2143	6.3D+05	420156.000	0.50	16.12	16.62	0.0D+00	9	0	2
MI	0	2041	7.2D+05	420156.000	0.07	72.33	72.40	0.0D+00	2069	0	
<b>4111</b> NO	560	1584	9.3D+05	408589.000	1.61	16.93	18.54	0.0D+00	10	0	2
MI	0	2002	1.4D+06	408589.000	0.08	82.42	82.50	0.0D+00	2029	0	
<b>5111</b> NO	645	1828	1.1D+06	439979.000	4.68	30.25	34.93	5.7D-18	9	0	11
MI	1	2290	9.1D+05	439979.000	0.15	108.73	108.88	0.0D+00	2318	0	
<b>3211</b> NO	8400	10101	1.0D+07	6004166.000	36.85	136.12	172.97	0.0D+00	1781	0	55
MI	7471	150579	1.6D+07	6004167.000	218.55	6641.38	6859.93	0.0D+00	152108	0	
<b>3311</b> NO	7748	7191	9.4D+06	5514650.000	44.19	128.88	173.07	0.0D+00	1557	0	33
MI	9811	95266	1.0D+07	5514651.000	397.27	5338.83	5736.10	0.0D+00	96224	0	
<b>3132</b> NO	4631	1216	5.6D+06	4590188.000	1.60	10.93	12.53	2.7D-09	104	0	9
MI	36	2404	9.3D+06	4590188.000	0.82	86.07	86.89	0.0D+00	2438	0	
<b>3221</b> NO	8666	10631	1.0D+07	5937720.000	39.75	153.27	193.02	0.0D+00	2112	0	55
MI	13920	125242	1.4D+07	5937720.000	428.40	5562.83	5991.23	0.0D+00	126513	0	

**Taula A2.6 :** Resultats model 22 rmbf.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	t <sub>01</sub>	t <sub>2</sub>	t.	Prec.	#f(x)	s*	c <sub>x</sub> *
<b>1111</b>	NO	501	1612	1.1D+04	5360.681	0.44	20.15	20.59	2.3D-07	484	26	1
	MI	0	1572	1.5D+04	5360.681	0.07	57.82	57.89	1.2D-09	1016	26	
<b>3111</b>	NO	501	1680	1.1D+04	5463.579	0.51	20.97	21.48	8.7D-07	449	27	5
	MI	0	1502	1.5D+04	5463.579	0.07	57.95	58.02	3.5D-09	976	27	
<b>4111</b>	NO	560	1705	1.4D+04	5525.047	1.80	30.03	31.83	1.8D-07	609	29	13
	MI	0	1798	2.8D+04	5525.047	0.08	70.28	70.36	3.6D-10	948	29	
<b>5111</b>	NO	645	2193	2.2D+04	5927.751	5.05	51.30	56.35	9.7D-07	590	27	33
	MI	1	1881	1.8D+04	5927.751	0.15	79.25	79.40	8.5D-09	730	27	
<b>3211</b>	NO	8400	8014	2.3D+05	129103.500	38.05	291.92	329.97	7.3D-07	9442	181	52
	MI	7471	20955	5.2D+05	129103.500	220.13	1127.43	1347.56	1.1D-11	21912	181	
<b>3311</b>	NO	7748	6140	2.3D+05	124568.100	45.88	232.88	278.76	5.7D-10	5938	183	31
	MI	9811	13713	2.4D+05	124568.100	395.47	893.77	1289.24	8.5D-08	14461	183	
<b>3132</b>	NO	4631	2289	1.6D+05	104986.700	1.68	83.42	85.10	5.9D-07	2916	246	15
	MI	36	1749	2.6D+05	104986.700	0.83	80.05	80.88	4.7D-08	1876	246	
<b>3221</b>	NO	8807	7511	2.5D+05	150795.500	41.22	281.08	322.30	1.2D-12	8878	216	59
	MI	13920	21419	3.4D+05	150795.500	428.75	1175.22	1603.97	1.2D-09	22080	216	

**Taula A2.7 :** Resultats model 13 ggeb.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	t <sub>01</sub>	t <sub>2</sub>	t.	Prec.	#f(x)	s*	c <sub>x</sub> *
<b>1121</b>	NO	2513	3575	5.5D+04	18920.380	0.70	632.90	633.60	7.9D-07	32932	1713	3
	MI	276	5202	2.5D+05	18930.510	3.93	6342.05	6345.98	2.8D-07	10468	1713	
<b>3121</b>	NO	2739	3781	1.2D+05	37807.320	1.57	614.22	615.79	8.6D-07	30001	1621	32
	MI	328	5101	2.6D+05	37826.040	4.80	4774.63	4779.43	3.0D-07	10138	1620	
<b>4121</b>	NO	3119	5285	1.7D+05	46661.090	4.57	698.33	702.90	4.1D-07	31522	1405	136
	MI	718	5591	2.9D+05	46691.350	12.52	3141.62	3154.14	1.1D-09	10770	1405	
<b>5121</b>	NO	3425	6855	7.9D+04	26920.250	10.60	796.38	806.98	9.4D-07	32624	1143	297
	MI	1473	5340	1.6D+05	26939.830	29.00	1681.15	1710.15	4.9D-09	9490	1144	
<b>4221</b>	NO	7299	12687	8.3D+05	252450.700	50.75	1951.77	2002.52	8.9D-07	67370	1288	73
	MI	4979	9072	2.0D+07	252800.300	116.65	3097.00	3213.65	2.0D-12	16957	1283	
<b>4321</b>	NO	5349	16060	1.1D+06	237142.500	46.25	6851.25	6897.50	5.1D-07	140465	2341	34
	MI	2987	13718	1.8D+06	237197.200	110.65	29790.25	29900.90	3.3D-11	30525	2339	
<b>4131</b>	NO	3402	6355	7.2D+04	22505.220	8.24	879.07	887.31	5.7D-07	40265	1377	191
	MI	1245	6230	1.6D+05	22514.540	21.60	3175.53	3197.13	6.5D-10	11426	1377	
<b>4141</b>	NO	3711	6622	7.8D+04	24107.620	12.52	961.30	973.82	9.1D-07	40553	1364	236
	MI	2038	7074	7.3D+05	24117.300	34.88	3247.40	3282.28	5.6D-09	12970	1363	
<b>4132</b>	NO	3571	7206	7.1D+04	22674.350	10.35	1247.68	1258.03	8.9D-07	54103	1354	211
	MI	1456	9205	1.7D+05	22515.320	24.95	9601.67	9626.62	4.9D-07	17088	1370	

Taula A2.8 : Resultats model 21 ggeb.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
1121	NO	2513	2224	2.4D+02	99.640	0.71	35.48	36.19	6.2D-07	2212	71	1
	MI	276	2237	6.9D+06	86.729	4.03	71.10	75.13	5.9D-08	3252	72	
3121	NO	2739	2579	4.6D+04	161.767	1.30	40.75	42.05	9.3D-07	2506	84	14
	MI	328	2429	2.9D+06	170.956	5.07	78.72	83.79	3.6D-08	3670	99	
4121	NO	3119	3908	1.8D+05	174.233	4.08	71.50	75.58	6.5D-07	3531	75	77
	MI	718	3757	1.1D+07	146.883	12.45	123.62	136.07	1.8D-08	4558	72	
5121	NO	3425	5769	2.9D+04	150.637	9.77	136.62	146.39	5.5D-07	5253	63	185
	MI	1473	6497	1.2D+06	121.571	31.17	247.75	278.92	1.1D-08	7714	66	
4221	NO	7299	14638	7.9D+05	696.884	47.67	467.03	514.70	2.4D-07	18068	181	65
	MI	4979	22383	2.1D+06	704.968	131.20	941.87	1073.07	4.9D-08	33929	187	
4321	NO	5349	15188	1.2D+07	623.741	46.27	701.50	747.77	5.8D-08	21326	348	36
	MI	2987	20969	5.1D+07	626.865	117.20	1311.45	1428.65	6.3D-08	32791	332	
4131	NO	3242	7213	9.9D+02	125.687	6.25	168.27	174.52	3.7D-07	7106	67	149
	MI	1245	6792	8.0D+05	114.006	23.05	238.97	262.02	4.6D-08	8286	77	
4141	NO	3660	8141	9.2D+02	131.282	12.30	211.45	223.75	9.3D-07	6255	69	225
	MI	2038	10068	2.9D+06	119.284	40.30	355.90	396.20	1.1D-07	11710	74	
4132	NO	3416	7474	1.4D+03	126.881	7.80	175.50	183.30	9.9D-07	6064	68	207
	MI	1456	7957	7.3D+05	114.262	27.15	282.98	310.13	7.5D-07	10024	72	

Taula A2.9 : Resultats model 22 ggeb.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
1121	NO	2513	1294	1.5D+02	86.230	0.75	17.33	18.08	1.2D-07	1032	55	2
	MI	276	1727	6.3D+02	86.230	4.07	56.32	60.39	4.8D-08	2506	55	
3121	NO	2761	1579	3.1D+02	170.561	1.70	25.88	27.58	3.2D-07	1450	90	17
	MI	328	1813	7.0D+02	170.561	4.92	61.82	66.74	2.6D-08	2771	90	
4121	NO	3116	2813	3.9D+02	146.610	5.23	52.30	57.53	1.8D-09	1951	69	74
	MI	718	3259	7.5D+02	146.610	12.25	112.55	124.80	9.1D-09	4133	69	
5121	NO	3756	4939	2.6D+02	121.065	14.28	122.93	137.21	4.8D-09	3561	63	155
	MI	1473	5343	5.7D+02	121.065	29.12	198.90	228.02	1.6D-08	6156	63	
4221	NO	6139	9988	1.7D+03	689.125	45.80	339.50	385.30	1.0D-11	11594	160	69
	MI	4979	10942	2.1D+03	689.125	119.30	483.15	602.45	1.3D-08	13837	160	
4321	NO	4771	7787	1.8D+03	601.684	38.87	346.50	385.37	3.9D-07	9329	269	36
	MI	2987	8880	1.9D+03	601.684	111.77	560.10	671.87	6.5D-10	13303	269	
4131	NO	3563	4957	2.5D+02	113.181	9.80	115.55	125.35	6.2D-07	3809	69	162
	MI	1245	5253	5.2D+02	113.181	21.75	176.67	198.42	5.7D-13	6027	69	
4141	NO	3742	6358	2.6D+02	118.723	13.35	180.80	194.15	1.3D-07	4114	56	225
	MI	2038	8534	5.9D+02	118.723	38.43	305.10	343.53	7.0D-09	9209	56	
4132	NO	3459	5283	2.4D+02	113.994	9.67	130.05	139.72	9.3D-07	3135	70	195
	MI	1456	7353	5.0D+02	113.959	26.90	263.65	290.55	3.9D-09	8510	65	

**Taula A2.10 :** Resultats model 22 gged.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1121</b>	NO	10454	5180	2.1D+03	1284.035	13.00	366.42	379.42	9.7D-08	5264	344	3
	MI	1583	6568	3.5D+03	1284.036	80.40	752.13	832.53	1.5D-08	9699	344	
<b>3121</b>	NO	10746	9568	8.3D+02	347.183	20.72	528.95	549.67	5.5D-07	7506	217	43
	MI	1977	10752	1.8D+03	347.183	103.25	1129.75	1233.00	5.9D-08	12992	219	
<b>4121</b>	NO	22607	53058	6.9D+02	293.664	304.52	4282.52	4587.04	1.8D-13	51691	141	375
	MI	24678	81547	1.0D+03	293.664	1700.87	9528.63	11229.50	4.1D-09	84193	141	
<b>4131</b>	NO	34315	116702	7.6D+02	307.195	986.50	13337.08	14323.58	3.1D-07	97219	126	550
	MI	45369	179699	1.0D+03	307.195	3104.85	16733.73	19838.58	1.8D-11	137607	126	
<b>4141</b>	NO	48006	182515	8.1D+02	328.908	3040.35	38082.83	41123.18	7.6D-07	79945	150	751
	MI	89691	228212	1.1D+03	328.908	7495.72	32945.68	40441.40	2.7D-07	232962	150	
<b>4122</b>	NO	35422	204313	7.4D+02	292.755	1551.63	30829.22	32380.85	4.2D-07	163965	134	374
	MI	44762	191710	1.0D+03	292.755	2940.70	24397.18	27337.88	1.2D-10	216379	134	

**Taula A2.11 :** Resultats model 21 gotd.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>1121</b>	NO	1199	8091	5.0D+02	68.112	26.12	390.25	416.37	5.2D-07	2985	34	11
	MI	6691	15476	8.9D+06	68.112	535.75	2196.15	2731.90	1.5D-08	14024	35	
<b>2121</b>	NO	6687	30694	7.3D+03	166.585	146.40	1451.38	1597.78	2.2D-07	8445	79	213
	MI	54395	141743	4.4D+06	166.588	5083.33	23625.90	28709.23	2.0D-09	137119	81	
<b>3121</b>	NO	21923	141032	4.0D+06	295.939	647.42	7800.02	8447.44	9.0D-08	31850	78	462
	MI	(1)										
<b>2131</b>	NO	11089	145967	7.0D+02	169.738	286.30	6384.48	6670.78	3.7D-08	16594	73	249
	MI	71950	261645	1.6D+06	169.742	6655.88	38615.30	45271.18	3.9D-08	196005	74	

(1) : execució abortada als 58686. segons, sense haver trobat encara una solució factible, amb una suma d'infactibilitat de valor 8107.



Taula A2.12 : Resultats models d'Optimització Hidro-Tèrmica..

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>xh48</b>	NO	774	163	-1.1D+05	-113921.200	0.69	3.00	3.69	6.4D-07	163	0	25
	(1) MI	341	158	-1.1D+05	-113921.200	2.43	4.77	7.20	1.1D-05	426	19	
<b>xha48</b>	NO	1953	704	-1.5D+05	-151449.200	0.89	13.53	14.42	8.0D-07	769	48	0
	MI	808	979	-1.3D+05	-151449.200	7.52	28.13	35.65	1.2D-10	1669	48	
<b>xhs40</b>	NO	5002	2252	-6.4D+02	-661.786	1.67	95.08	96.75	8.7D-07	2412	15	46
	MI	4196	3002	2.4D+03	-662.014	82.32	195.42	277.74	1.8D-08	4437	47	
<b>xh168</b>	NO	4595	277	-1.1D+05	-115669.500	3.98	15.10	19.08	7.9D-07	274	0	0
	MI	990	491	-1.1D+05	-115669.600	24.50	53.35	77.85	0.0D+00	1414	0	
<b>xha168</b>	NO	12094	2557	-1.5D+05	-152693.000	7.07	192.65	199.72	1.3D-10	2816	168	0
	(1) MI	2361	1812	-1.1D+05	-152679.400	81.62	181.92	263.54	2.2D-02	2702	27	
<b>xhs50</b>	NO	26501	11991	1.1D+04	-2099.585	19.97	1972.42	1992.39	1.7D-15	12491	0	24
	MI	5536	152009	1.2D+04	-2108.994	467.63	25064.75	25532.38	2.5D-12	98982	48	

(1) : MINOS 5.3 no pot convergir a l'òptim amb la precisió exigida ( $10^{-6}$ ). En el cas xh48 però, aixó no afecta al valor de  $f(x^*)$ .

Taula A2.13 : Resultats models de Planificació Hidro-Tèrmica.

		it <sub>01</sub>	it <sub>2</sub>	$f(x^0)$	$f(x^*)$	$t_{01}$	$t_2$	$t.$	Prec.	$\#f(x)$	$s^*$	$c_x^*$
<b>xa48</b>	NO	2151	747	6.9D-01	0.126	3.35	12.80	16.15	9.9D-07	1106	94	145
	MI	1126	879	4.7D+01	0.126	14.60	19.38	33.98	4.7D-08	2553	94	
<b>xa168</b>	NO	8545	3177	6.8D+00	0.362	33.15	284.50	317.65	9.2D-07	4749	331	504
	MI	3503	3094	6.4D+01	0.362	177.67	309.30	486.97	9.7D-10	8330	331	
<b>xaa48</b>	NO	5982	1659	7.1D+00	0.194	31.37	78.58	109.95	8.6D-07	2040	101	467
	MI	3868	3404	2.1D+02	0.194	112.98	171.00	283.98	3.0D-08	8796	97	
<b>xaa168</b>	NO	20873	9842	3.9D+02	0.521	284.88	1877.17	2162.05	9.8D-07	11226	353	1549
	MI	15904	10941	3.5D+03	0.521	1840.73	2268.87	4109.60	3.9D-11	31151	365	
<b>xas48</b>	NO	12215	3572	1.2D+05	-1.755	53.17	168.95	222.12	6.4D-07	3697	37	431
	(1) MI	5504	10178	1.3D+08	-28.149	245.60	592.55	838.15	8.1D-06	15087	32	
<b>xas168</b>	NO	55655	41968	1.3D+04	0.453	693.75	9889.48	10583.23	1.0D-06	59498	377	1510
	(2) MI	12041	107292	2.8D+07	18818370.000	1944.83	22039.08	23983.91	2.0D-11	99566	34	

(1) : MINOS 5.3 no pot convergir a l'òptim amb la precisió exigida ( $10^{-6}$ ).

(2) : MINOS 5.3 s'ha d'executar amb un valor de FEASIBILITY TOLERANCE alt per tal que trobi un punt factible, i les infactibilitats a la solució afecten molt el valor de la funció objectiu.



## APÈNDIX AP3

### Taules d'eficiència relativa MINOS 5.3 - NOXCB 9.0.

Es presenten en aquest apèndix les taules de comparació entre l'eficiència de MINOS 5.3 i NOXCB 9.0. La informació continguda a aquestes taules és :

%  $s^*$  : fracció, en tant per cent, que representen les variables superbàsiques a l'òptim respecte de les variables fora de la base (superbàsiques i no bàsiques). Aquest factor és un indicador del cost del tractament de les operacions relacionades amb la no linealitat del problema.

%  $c_x^*$  : fracció, en tant per cent, que representen les constriccions a banda actives a l'òptim respecte de les constriccions de xarxa. Representa un indicador del cost de tractament de les constriccions a banda.

# $f/it_2$  : nombre d'avaluacions per iteració. Per a problemes on l'avaluació de la funció objectiu i gradient són costosos aquest valor influeix directament en el temps d'execució.

$(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$  : relació entre el temps per iteració de MINOS 5.3 i NOXCB 9.0.

$t_{MI}/t_{NO}$  : relació entre el temps d'execució de MINOS 5.3 i NOXCB 9.0.

**Taula A3.1 :** Eficiència relativa model 10 rmfa.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		(t/it) $\frac{MI}{NO}$		t <sub>MI</sub> /t <sub>NO</sub>		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>10 rmfa1111</b>	60.78	0.28	3.82	2.23	–	2.19	0.14	2.24	<b>2.24</b>
<b>10 rmfa2111</b>	61.17	0.56	3.76	2.30	–	2.35	0.14	2.12	<b>2.12</b>
<b>10 rmfa3111</b>	61.35	1.67	3.73	2.23	0.33	2.04	0.08	2.10	<b>2.10</b>
<b>10 rmfa4111</b>	67.68	6.67	3.42	2.20	4.52	1.87	0.17	1.78	<b>1.77</b>
<b>10 rmfa5111</b>	80.97	9.44	3.33	2.19	0.19	1.80	0.40	1.68	<b>1.67</b>
<b>10 rmfa3211</b>	34.04	7.50	2.02	2.09	3.70	1.43	0.10	0.93	<b>0.92</b>
<b>10 rmfa3311</b>	25.35	3.33	2.06	2.01	2.77	1.40	3.37	0.89	<b>0.94</b>
<b>10 rmfa3221</b>	47.61	1.39	2.56	2.28	2.85	1.25	3.26	1.20	<b>1.21</b>
<b>10 rmfa3241</b>	40.87	10.00	2.87	2.30	3.00	1.24	2.78	0.72	<b>0.75</b>
<b>10 rmfa3231</b>	44.33	5.56	2.46	2.26	3.05	1.22	2.25	1.01	<b>1.02</b>
<b>10 rmfa2112</b>	61.17	0.56	3.78	2.30	0.38	2.29	0.15	2.06	<b>2.06</b>
<b>10 rmfa3132</b>	61.35	1.67	3.77	2.25	0.50	1.93	0.12	1.93	<b>1.93</b>
<b>10 rmfa3232</b>	34.13	9.17	2.07	2.01	4.25	1.28	3.99	0.70	<b>0.73</b>

- Models 1111 i 2111 : no s'executa cap iteració de la fase 1 doncs el punt pseudofactible obtingut a la fase 0 és ja factible.

**Taula A3.2 :** Eficiència relativa model 20 rmfa.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		(t/it) $\frac{MI}{NO}$		t <sub>MI</sub> /t <sub>NO</sub>		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>20 rmfa1111</b>	0.00	0.00	0.05	1.03	0.20	3.34	0.10	21.27	<b>9.06</b>
<b>20 rmfa2111</b>	0.00	0.00	0.05	1.03	0.25	3.37	0.10	19.64	<b>8.37</b>
<b>20 rmfa3111</b>	0.00	0.00	0.05	1.02	0.83	3.41	0.17	23.18	<b>10.10</b>
<b>20 rmfa4111</b>	0.00	0.00	0.06	1.02	2.44	3.16	0.12	9.24	<b>5.61</b>
<b>20 rmfa5111</b>	0.00	0.00	0.05	1.03	0.05	2.06	0.20	9.44	<b>4.72</b>
<b>20 rmfa3211</b>	0.00	0.28	0.04	1.02	3.94	3.92	0.09	9.96	<b>5.76</b>
<b>20 rmfa3311</b>	0.00	0.28	0.03	1.01	2.77	3.33	7.32	27.76	<b>20.42</b>
<b>20 rmfa3221</b>	0.00	0.56	0.03	1.02	3.58	4.10	0.22	11.75	<b>7.05</b>
<b>20 rmfa3231</b>	0.00	5.00	0.04	1.02	3.37	3.84	2.10	15.69	<b>11.67</b>
<b>20 rmfa3241</b>	0.00	9.72	0.03	1.00	3.33	3.63	4.91	8.07	<b>7.77</b>
<b>20 rmfa2112</b>	0.00	0.00	0.05	1.03	0.25	3.40	0.10	19.77	<b>8.42</b>
<b>20 rmfa3132</b>	0.00	0.00	0.05	1.03	0.33	3.29	0.10	21.22	<b>9.26</b>

Taula A3.3 : Eficiència relativa model 22 rmfa.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		(t/it) $\frac{MI}{NO}$		t <sub>MI</sub> /t <sub>NO</sub>		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>22 rmfa1111</b>	5.86	0.00	1.29	1.15	0.56	1.29	0.20	0.83	<b>0.81</b>
<b>22 rmfa2111</b>	5.93	0.28	1.28	1.12	0.25	1.27	0.23	0.75	<b>0.73</b>
<b>22 rmfa3111</b>	6.21	0.28	1.30	1.11	0.33	1.25	0.23	0.83	<b>0.81</b>
<b>22 rmfa4111</b>	6.30	1.94	1.24	1.08	3.85	1.29	0.18	0.65	<b>0.63</b>
<b>22 rmfa5111</b>	8.33	1.94	1.21	1.20	0.06	1.34	0.27	0.92	<b>0.88</b>
<b>22 rmfa3211</b>	4.96	5.56	0.81	0.97	4.08	1.63	0.09	0.92	<b>0.85</b>
<b>22 rmfa3311</b>	4.88	3.06	1.28	1.22	2.52	1.43	3.27	1.10	<b>1.41</b>
<b>22 rmfa3221</b>	4.96	5.83	0.92	0.87	3.17	1.40	0.20	0.68	<b>0.65</b>
<b>22 rmfa3231</b>	5.76	8.33	0.92	1.11	2.74	1.66	1.40	1.19	<b>1.21</b>
<b>22 rmfa3241</b>	4.43	10.00	0.60	1.05	3.00	2.10	3.19	1.98	<b>2.17</b>
<b>22 rmfa2112</b>	5.93	0.28	1.22	1.08	0.42	1.25	0.24	0.78	<b>0.77</b>
<b>22 rmfa3132</b>	6.21	0.56	1.26	1.16	0.20	1.28	0.13	0.84	<b>0.82</b>
<b>22 rmfa3232</b>	5.41	8.06	0.91	1.07	3.11	1.66	2.02	1.34	<b>1.43</b>

Taula A3.4 : Eficiència relativa model 10 rmfb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		(t/it) $\frac{MI}{NO}$		t <sub>MI</sub> /t <sub>NO</sub>		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>10 rmfb1111</b>	79.66	0.50	10.74	10.00	5.00	–	0.37	–	–
<b>10 rmfb3111</b>	79.41	3.50	10.54	10.00	3.00	–	0.38	–	–
<b>10 rmfb4111</b>	80.25	15.83	10.21	10.00	15.39	–	0.10	–	–
<b>10 rmfb5111</b>	81.46	28.92	8.58	2.00	7.45	6.61	0.08	7.27	<b>7.26</b>
<b>10 rmfb3211</b>	29.34	4.67	6.38	1.81	2.03	1.24	12.86	1.03	<b>1.09</b>
<b>10 rmfb3311</b>	32.02	1.33	5.07	1.96	1.52	2.60	7.68	3.19	<b>3.22</b>
<b>10 rmfb3221</b>	30.37	5.25	7.98	1.86	2.02	1.18	17.01	0.85	<b>0.93</b>

• Models 1111 a 4111 : execució de MINOS 5.3abortada.

**Taula A3.5 :** Eficiència relativa model 20 rmfb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>20 rmfb1111</b>	0.00	0.00	0.00	1.01	–	5.04	0.11	4.85	<b>4.69</b>
<b>20 rmfb3111</b>	0.00	0.17	0.00	1.01	–	4.71	0.14	4.49	<b>4.36</b>
<b>20 rmfb4111</b>	0.00	0.17	0.01	1.01	–	3.85	0.05	4.87	<b>4.45</b>
<b>20 rmfb5111</b>	0.00	0.92	0.00	1.01	5.02	2.87	0.03	3.59	<b>3.12</b>
<b>20 rmfb3211</b>	0.00	4.58	0.18	1.01	3.16	3.27	5.93	48.79	<b>39.66</b>
<b>20 rmfb3311</b>	0.00	2.75	0.22	1.01	3.03	3.13	8.99	41.42	<b>33.14</b>
<b>20 rmfb3132</b>	0.00	0.75	0.09	1.01	3.43	3.98	0.51	7.87	<b>6.93</b>
<b>20 rmfb3221</b>	0.00	4.58	0.20	1.01	3.29	3.08	10.78	36.29	<b>31.04</b>

- Models 1111 a 4111 : el primer punt de la fase 1 és factible per MINOS 5.3.

**Taula A3.6 :** Eficiència relativa model 22 rmfb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>22 rmfb1111</b>	0.62	0.08	0.30	0.65	–	2.94	0.16	2.87	<b>2.81</b>
<b>22 rmfb3111</b>	0.66	0.42	0.27	0.65	–	3.09	0.14	2.76	<b>2.70</b>
<b>22 rmfb4111</b>	0.80	1.08	0.36	0.53	–	2.22	0.04	2.34	<b>2.21</b>
<b>22 rmfb5111</b>	0.89	2.75	0.27	0.39	4.65	1.80	0.03	1.54	<b>1.41</b>
<b>22 rmfb3211</b>	4.41	4.33	1.18	1.05	3.08	1.48	5.79	3.86	<b>4.08</b>
<b>22 rmfb3311</b>	4.46	2.58	0.97	1.05	2.90	1.72	8.62	3.84	<b>4.62</b>
<b>22 rmfb3132</b>	6.00	1.25	1.27	1.07	3.36	1.26	0.49	0.96	<b>0.95</b>
<b>22 rmfb3221</b>	5.27	4.92	1.18	1.03	3.28	1.47	10.40	4.18	<b>4.98</b>

- Models 1111 a 4111 : el primer punt de la fase 1 és factible per MINOS 5.3.

**Taula A3.7 :** Eficiència relativa model 13 ggeb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it) \frac{MI}{NO}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>13 ggeb1121</b>	48.91	0.60	9.21	2.01	1.54	6.89	5.61	10.02	<b>10.02</b>
<b>13 ggeb3121</b>	46.89	6.39	7.93	1.99	3.80	5.76	3.06	7.77	<b>7.76</b>
<b>13 ggeb4121</b>	43.15	27.15	5.96	1.93	2.75	4.25	2.74	4.50	<b>4.49</b>
<b>13 ggeb5121</b>	38.02	59.28	4.76	1.78	1.81	2.71	2.74	2.11	<b>2.12</b>
<b>13 ggeb4221</b>	39.56	14.57	5.31	1.87	2.24	2.22	2.30	1.59	<b>1.60</b>
<b>13 ggeb4321</b>	71.90	6.79	8.75	2.23	2.31	5.09	2.39	4.35	<b>4.34</b>
<b>13 ggeb4131</b>	42.29	38.12	6.34	1.83	2.04	3.68	2.62	3.61	<b>3.60</b>
<b>13 ggeb4141</b>	41.89	47.11	6.12	1.83	1.73	3.16	2.79	3.38	<b>3.37</b>
<b>13 ggeb4132</b>	41.58	42.12	7.51	1.86	1.88	6.02	2.41	7.70	<b>7.65</b>

**Taula A3.8 :** Eficiència relativa model 21 ggeb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it) \frac{MI}{NO}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>21 ggeb1121</b>	2.03	0.20	0.99	1.45	2.37	1.99	5.68	2.00	<b>2.08</b>
<b>21 ggeb3121</b>	2.43	2.79	0.97	1.51	4.80	2.05	3.90	1.93	<b>1.99</b>
<b>21 ggeb4121</b>	2.30	15.37	0.90	1.21	3.02	1.80	3.05	1.73	<b>1.80</b>
<b>21 ggeb5121</b>	2.10	36.93	0.91	1.19	2.13	1.61	3.19	1.81	<b>1.91</b>
<b>21 ggeb4221</b>	5.56	12.97	1.23	1.52	2.68	1.32	2.75	2.02	<b>2.08</b>
<b>21 ggeb4321</b>	10.69	7.19	1.40	1.56	2.44	1.35	2.53	1.87	<b>1.91</b>
<b>21 ggeb4131</b>	2.06	29.74	0.99	1.22	2.41	1.51	3.69	1.42	<b>1.50</b>
<b>21 ggeb4141</b>	2.12	44.91	0.77	1.16	1.95	1.36	3.28	1.68	<b>1.77</b>
<b>21 ggeb4132</b>	2.09	41.32	0.81	1.26	2.35	1.51	3.48	1.61	<b>1.69</b>

**Taula A3.9 :** Eficiència relativa model 22 ggeb.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it) \frac{MI}{NO}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>22 ggeb1121</b>	1.57	0.40	0.80	1.45	1.07	2.44	5.43	3.25	<b>3.34</b>
<b>22 ggeb3121</b>	2.60	3.39	0.92	1.53	3.32	2.08	2.89	2.39	<b>2.42</b>
<b>22 ggeb4121</b>	2.12	14.77	0.69	1.27	2.22	1.86	2.34	2.15	<b>2.17</b>
<b>22 ggeb5121</b>	2.10	30.94	0.72	1.15	1.81	1.50	2.04	1.62	<b>1.66</b>
<b>22 ggeb4221</b>	4.91	13.77	1.16	1.26	1.93	1.30	2.60	1.42	<b>1.56</b>
<b>22 ggeb4321</b>	8.26	7.19	1.20	1.50	2.22	1.42	2.88	1.62	<b>1.74</b>
<b>22 ggeb4131</b>	2.12	32.34	0.77	1.15	2.00	1.44	2.22	1.53	<b>1.58</b>
<b>22 ggeb4141</b>	1.72	44.91	0.65	1.08	1.82	1.26	2.88	1.69	<b>1.77</b>
<b>22 ggeb4132</b>	2.15	38.92	0.59	1.16	1.93	1.46	2.78	2.03	<b>2.08</b>

**Taula A3.10 :** Eficiència relativa model 22 gged.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it) \frac{MI}{NO}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>22 gged1121</b>	3.28	0.20	1.02	1.48	5.44	1.62	6.18	2.05	<b>2.19</b>
<b>22 gged3121</b>	2.10	2.86	0.78	1.21	3.90	1.90	4.98	2.14	<b>2.24</b>
<b>22 gged4121</b>	1.45	24.98	0.97	1.03	3.00	1.45	5.59	2.23	<b>2.45</b>
<b>22 gged4131</b>	1.29	36.64	0.83	0.77	1.73	0.81	3.15	1.25	<b>1.39</b>
<b>22 gged4141</b>	1.54	50.03	0.44	1.02	1.06	0.69	2.47	0.87	<b>0.98</b>
<b>22 gged4122</b>	1.37	24.92	0.80	1.13	1.10	0.84	1.90	0.79	<b>0.84</b>

**Taula A3.11 :** Eficiència relativa model 21 gotd.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it) \frac{MI}{NO}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>21 gotd1121</b>	0.23	0.37	0.37	0.91	4.28	2.94	20.51	5.63	<b>6.56</b>
<b>21 gotd2121</b>	0.54	7.10	0.28	0.97	4.35	3.52	34.72	16.28	<b>17.97</b>
<b>21 gotd2131</b>	0.50	8.30	0.11	0.75	3.62	3.37	23.25	6.05	<b>6.79</b>



**Taula A3.12 :** Eficiència relativa models d'Optimització Hidro-Tèrmica.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>11 xh48</b>	0.00	8.65	1.00	2.70	1.01	1.64	3.52	1.59	<b>1.95</b>
<b>11 xha48</b>	3.85	0.00	1.09	1.70	0.13	1.50	8.45	2.08	<b>2.47</b>
<b>11 xhs40</b>	0.49	4.79	1.07	1.48	0.23	1.54	49.29	2.06	<b>2.87</b>
<b>11 xh168</b>	0.00	0.00	0.99	2.88	0.05	1.99	6.16	3.53	<b>4.08</b>
<b>11 xha168</b>	3.85	0.00	1.10	1.49	0.06	1.33	11.54	0.94	<b>1.32</b>
<b>11 xhs50</b>	0.00	0.71	1.04	0.65	0.10	1.00	23.42	12.71	<b>12.81</b>

- Models xha48 a xhs50 : NOXCB 9.0 només realitza una iteració de la fase 1 el que fa que el temps comptabilitzat no sigui una bona estimació del temps per iteració.

**Taula A3.13 :** Eficiència relativa models de Planificació Hidro-Tèrmica.

	% $s^*$	% $c_x^*$	#f/it <sub>2</sub>		$(t/it)_{\frac{MI}{NO}}$		$t_{MI}/t_{NO}$		
			NO	MI	1	2	01	2	012
<b>12 xa48</b>	7.13	20.80	1.48	2.90	1.94	1.29	4.36	1.51	<b>2.10</b>
<b>12 xa168</b>	6.98	20.33	1.49	2.69	1.93	1.12	5.36	1.09	<b>1.53</b>
<b>12 xaa48</b>	3.97	34.72	1.23	2.58	1.57	1.06	3.60	2.18	<b>2.58</b>
<b>12 xaa168</b>	3.92	32.67	1.14	2.85	1.87	1.09	6.46	1.21	<b>1.90</b>
<b>12 xas48</b>	0.85	23.01	1.03	1.48	2.89	1.23	4.62	3.51	<b>3.77</b>
<b>12 xas168</b>	2.45	22.92	1.42	0.93	2.28	0.87	2.80	2.23	<b>2.27</b>



## APÈNDIX AP4

### Bibliografia.

- [1] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin. “ *Network Flows*”, Prentice Hall., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [2] Avriel, M. “ *Nonlinear programming analysis and methods*”, Prentice-Hall Inc, 1976.
- [4] Barr, R. “ *A large-scale linear optimizer for small- and large-scale systems*”, OR/MS Today, 18 (1991) 26–29.
- [3] Batut, J. and A. Renbaud. “ *Daily Generation Scheduling Optimization with Transmission Constraints : a New Class of Algorithms*”, IEEE Trans. on Power Systems , 7 (1992) 982–987.
- [5] Bennet, J.M. “ *An Approach to Some Structured Linear Programming Problems*”, Operations Research , 14 (1966) 635–645.
- [6] Bertsekas, D.P. “ *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*”, Academic Press, London, 1982.
- [7] Bradley, G.H., G.G. Brown and G.W. Graves. “ *Design and implementation of large scale transshipment algorithms*”, Management Science, 24 (1977) 1–34.
- [8] Brännlud, H., D. Sjelvgren and J.A. Bubenko. “ *Short Term Generation Scheduling with Security Constraints*”, IEEE Trans. on Power Systems , 3 (1988) 310–316.
- [9] Carvalho, M.F. and S. Soares. “ *An efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm*”, IEEE Trans. on Power Systems , 2 (1987) 537–542.
- [10] Carvalho, M.F., S. Soares and T. Ohishi. “ *Optimal Active Power Dispatch by Network Flow Approach*”, IEEE Trans. on Power Systems , 3 (1988) 1640–1646.
- [11] Castro, J. and N. Nabona. “ *Computational tests of a Linear Multicommodity Network Flow Code with Linear Side Constraints Through Primal Partitioning*”, Document de Recerca DR 94/02, Departament d’Estadística i Investigació Operativa, Universitat Politècnica de Catalunya, 1994.

- [12] Castro, J. and N. Nabona. “ *Computational tests of a Nonlinear Multicommodity Network Flow Code with Linear Side Constraints Through Primal Partitioning*”, Document de Recerca DR 94/05, Departament d’Estadística i Investigació Operativa, Universitat Politècnica de Catalunya, 1994.
- [13] Chen, S. and R. Saigal. “ *A Primal Algorithm for Solving a Capacitated Network Flow Problem with Additional Linear Constraints*”, *Networks* 7 (1977) 59–79.
- [14] Chvátal, V. “ *Linear Programming*”, W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [15] Collins, M., L. Cooper, R. Helgason, J. Kennington and L. LeBlanc. “ *Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques*”, *Management Science*, 24 (1978) 747–760.
- [16] Dantzig, G.B. “ *Aplication of the Simplex Method to a Transportation Problem*”, in *Activity Analysis of Production and Allocation*, T.C. Koopmans, ed., John Wiley and Sons, New York, 1951.
- [17] Dantzig, G.B. “ *Upper Bounds, Secondary Constraints, and Block Triangularity in Linear Programming*”, *Econometrica*, 23 (1955) 174–183.
- [18] Dantzig, G.B. and R.M. Van Slyke. “ *Generalized Upper Bounded Techniques for Linear Programming*”, *Journal of Computed and System Sciences*, 1 (1967) 213–226.
- [19] De La Fuente, J.L. “ *Tecnologías Computacionales para Sistemas de Ecuaciones, Optimización Lineal y Entera*”, Editorial Reverté, Barcelona, 1993.
- [20] Dembo, R.S. “ *The Performance of NLPNET, a Large-Scale Nonlinear Network Solver*”, *Mathematical Programming Study*, 26 (1986) 245–248.
- [21] Dembo, R.S. “ *A primal truncated newton algorithm with application to large-scale nonlinear network optimization*”, *Mathematical Programming Studies*, 31 (1987) 43–71.
- [22] Dembo, R.S., S.C. Eisenstat and T. Steihaug. “ *Inexact Newton Methods*”, *SIAM Journal on Numerical Analisis*, 19 (1982) 400–408.
- [23] Dembo, R.S. and J.G. Klincewicz. “ *A scaled reduced gradient algorithm for network flow problems with convex separable costs*”, *Mathematical Programming Study*, 15 (1981) 125–147.
- [24] Dembo, R.S. and T. Steihaug. “ *Truncated-Newton Algorithms for Large-Scale Unconstrained Optimization*”, *Mathematical Programming* 26 (1983) 190–212.

- 
- [25] Dennis, J.E. Jr and R.B. Schnabel. “ *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*”, Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. Cleve Moler, Advisor. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1983.
  - [26] “ *The first DIMACS international algorithm implementation challenge : The benchmark experiments*”, Technical report, DIMACS, New Brunswick, NJ, USA, 1991.
  - [27] Duff, I.S., A.M. Erisman and J.K. Reid. “ *Direct Methods for Sparse Matrices*”, Monographs in Numerical Analysis, Oxford University Press, Oxford, 1989.
  - [28] Duff, I.S., R.G. Grimes and J.G. Lewis. “ *Sparse Matrix Test Problems*”, Report CSS 191, Computer Science and Systems Division, Harwell Laboratory, 1987.
  - [29] Duff, I.S. and J.K. Reid. “ *Performance Evaluation of Codes for Sparse Matrix Problems*”, In Fosdick, 1979, 121–135.
  - [30] Escudero, L.F. “ *A motivation for Using the Truncated Newton Approach in a very Large Scale Nonlinear Network Problem*”, Mathematical Programming Studies, 26 (1986) 240–245.
  - [31] Florian, M. “ *An improved linear approximation algorithm for the network equilibrium (Packet switching) problem*”, Publication No. 251. Departament d’informatique et de recherche operationelle, Université de Montreal, 1977.
  - [32] Franco, P.E.C., M.F. Carvalho and S. Soares. “ *A Network Flow Model for Short-Term Hydro-Dominated Hydrothermal Scheduling Problems*”, 1993 IEEE/PES Summer Meeting, Vancouver, B.C., Canada, 93 SM 500-9 PWRS.
  - [33] Gill, P.E., W. Murray, M.H. Wright. “ *Practical Optimization*”, Academic Press, Inc, London, 1981
  - [34] Glover, F. and D. Klingman. “ *The Simplex SON Algorithm for LP/Embedded Network Problems*”, Research Report CCS 317, Center for Cybernetic Studies, The University of Texas, Austin, Texas, 1979.
  - [35] Goldfarb, D. and M.D. Grigoriadis. “ *A Computational Comparison of the Dinic and Network Simplex Methods for Maximum Flow*”, Annals of Operations Research, 13 (1988) 83–128.
  - [36] Golub, G.H. and Ch.F. Van Loan. “ *Matrix Computations*”, North Oxford Academic Publishing Co. Ltd., Oxford, 1983.
  - [37] Grigoriadis, M.D. “ *An Efficient Implementation of the Network Simplex Method*”, Mathematical Programming Study, 26 (1986) 83–111.

- [38] Guan, X., P.B. Luh and L. Zhang. “ *Nonlinear Approximation Method in Lagrangian Relaxation-Based Algorithms for Hydrothermal Scheduling*”, 1994 IEEE/PES Summer Meeting, San Francisco, CA, USA, 94 SM 562-9 PWRS.
- [39] Gulliver, J.S., R.E.A. Arndt. “ *Hydropower Engineering Handbook*”, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [40] Habibollahzadeh, H., G.X. Luo and A. Semlyen. “ *Hydrothermal Optimal Power Flow Based on Combined Linear and Nonlinear Programming Methodology*”, IEEE Trans. on Power Systems , 4 (1989) 530–537.
- [41] Hartman, J.K. and L.S. Lasdon. “ *A Generalized Upper Bounding Method for Doubly Coupled Linear Programs*”, Naval Logistics Quarterly, 17 (1970) 411–429.
- [42] Helgason, R.V. and J.L. Kennington. “ *An efficient specialization of the convex simplex method for nonlinear network flow problems*”, Technical Report IEOR 77017, Southern Methodist University, April 1978.
- [43] Hellerman, E. and D. Rarick. “ *Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure.*”, Mathematical Programming, 1 (1971) 195–216.
- [44] Heredia, F.J. i N. Nabona. “ *Programa FXCB de fluxos lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals*”, Report de recerca RR 90/06, Facultat d’Informàtica de Barcelona, 1990.
- [45] Heredia, F.J. and N. Nabona. “ *Large scale nonlinear network optimization with linear side constraints*”, ponència presentada a EURO XI, 11th European Congress on Operational Research. Aachen, juliol 1991.
- [46] Heredia, F.J. and N. Nabona. “ *Numerical implementation and computational results of nonlinear network optimization with linear side constraints*”, in *Proceedings of the 15th IFIP Conference on System Modelling and Optimization*. P. Kall editor. Springer-Verlag, 1992, 301–310.
- [47] Heredia, F.J. and N. Nabona. “ *Nonlinear Network Flows with Side Constraints Applied to Short Term Hydrothermal Coordination of Electricity Generation*”, Numerical Methods in Engineering’ 92. Ch. Hirsch et al. (editors), Elsevier Science Publishers B.V., 1992, 437–444.
- [48] Heredia, F.J. and N. Nabona. “ *Development and Computational Tests of an Undecoupled Optimum Short-Term Hydrothermal Scheduling Code using Network Flows*”, TOP, 2 (1994) 105–132.

- 
- [49] Heredia, F.J. and N. Nabona. “ *Optimum Short-Term Hydrothermal Scheduling with Spinning Reserve through Network Flows*”, 1995 IEEE/PES Winter Meeting, New York, N.Y., USA, 95 WM PWRS.
- [50] Johannesen, A., A. Gjelsvik, O.B. Fosso and N. Flatabo. “ *Optimal Short-Term Hydroelectric Scheduling Including Security Constraints*”, IEEE Trans. on Power Systems , 6 (1991) 576–583.
- [51] Kennington, J.L. and R.V. Helgason. “ *Algorithm for network programming*”, John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [52] Kennington, J.L. and A. Whisman “ *NETSIDE User’s Guide*”, Technical Report 86-OR-01. Department of Operations Research, Southern Methodist University, Dallas, 1986.
- [53] Lauer, G.S., D.P. Bertsekas, N.R. Sandell and T.A. Posberg. “ *Solution of Large-Scale Optimal Unit Commitment Problems*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems , 101 (1982) 79–86.
- [54] Li, Ch., P.J. Jap and D.L. Streiffert. “ *Implementation of Network Flow Programming to the Hydrothermal Coordination in an Energy Management System*”, IEEE Trans. on Power Systems , 8 (1993) 1045–1053.
- [55] Luenberger, D.G.. “ *Linear and Nonlinear Programming*”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.
- [56] Luo, G.X., H. Habibollahzadeh and A. Semlyen. “ *Short-Term Hydro-Thermal Dispatch Detailed Model and Solutions*”, IEEE Trans. on Power Systems , 4 (1989) 1452–1462.
- [57] Merlin, A. and P. Sandrin. “ *A New Method for Unit Commitment at Electricite de France*”, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems , 102 (1983) 1218–1225.
- [58] Meyer, R.R. “ *Two-Segment separable programming*”, Management Science, 25 (1979) 385–395.
- [59] Murtagh, B.A. and M.A. Saunders. “ *Large-Scale Linearly Constrained Optimization*”, Mathematical Programming, 14 (1978) 41–72.
- [60] Murtagh, B.A. and M.A. Saunders. “ *A Projected Lagrangian Algorithm and its Implementation for Sparse Nonlinear Constraints*”, Mathematical Programming Study, 16 (1982) 84–117.
- [61] Murtagh, B.A. and M.A. Saunders. “ *MINOS 5.1 User’s Guide*”, Technical Report SOL 83-20R, Dept. of Operations Research, Stanford University, 1987.

- [62] Nabona, N. “ *Descripció del programa LEXA*”, document intern, Dep. d’Estadística i Investigació Operativa, Facultat d’Informàtica de Barcelona.
- [63] Nguyen, S. “ *A mathematical programming approach to equilibrium methods of traffic assignment with fixed demands*”, Publication No. 138, Departament d’informatique et de recherche operationnelle, Université de Montréal, 1973.
- [64] “ *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*”, W. Murray, editor, Academic Press, London, 1972.
- [65] “ *Optimization*”, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 1. G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan i M.J. Todd, editors, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [66] Ohishi, T., S. Soares and W.F.H. Carvalho. “ *Short-term Hydrothermal Scheduling Approach for Predominantly Hydroelectric Systems*”, IEEE Trans. on Power Systems , 6 (1991) 637–643.
- [67] Peterson, W.L. and S.R. Brammer. “ *A Capacity Based Lagrangian Relaxation Unit Commitment with Ramp Rate Constraints*”, 1994 IEEE/PES Summer Meeting, San Francisco, CA, USA, 94 SM 590-0 PWRS.
- [68] Rosenthal, R.E. “ *A Nonlinear Network Flow Algorithm for Maximization of Benefits in a Hydroelectric Power System*”, Operations Research, 29 (1981) 763–784.
- [69] Sasaki, H., M. Watanabe and R. Yokoyama. “ *A Solution Method of Unit Commitment by Artificial Neural Networks*”, IEEE Trans. on Power Systems , 7 (1992) 974–981.
- [70] Schrage, L. “ *A More Portable FORTRAN Random Number Generator*”, ACM Transactions on Mathematical Software, 1979.
- [71] Snyder, W.L., H.D. Powell and J.C. Rayburn. “ *Dynamic programming approach to unit commitment*”, IEEE Trans. on Power Systems , 2 (1987) 339–350.
- [72] Toint, Ph.L. and D. Tuytens. “ *On large scale nonlinear network optimization*”, Mathematical Programming, 48 (1990) 125–159.
- [73] Toint, Ph.L. and D. Tuytens. “ *LSNNO: A Fortran subroutine for solving large-scale nonlinear network optimization problems*”, ACM Trans. Math. Software, 18 (1992) 308–328.
- [74] Tong, S.K. and S.M. Shahidehpour. “ *An Innovative Approach to Generation Scheduling in Large-Scale Hydro-Thermal Power Systems with Fuel Constrained Units*”, IEEE Trans. on Power Systems , 5 (1990) 665–673.



- 
- [75] Virmani, S., K. Imhof and S. Mukherjee. “*Implementation of a Lagrangian Relaxation Based Unit Commitment Problem*”, IEEE Trans. on Power Systems , 4 (1989) 1373–1380.
- [76] Wang, C. and S.M. Shahidehpour. “*Power Generation Scheduling for Multi-Area Hydro-Thermal Systems with Tie Line Constraints, Cascaded Reservoirs and Uncertain Data*”, IEEE Trans. on Power Systems , 8 (1993) 1333–1340.
- [77] Wang, S.J., S.M. Shahidehpour, D.S. Kirschen, S. Mokhtari and G.D. Irisarri. “*Short-Term Generation Scheduling with Transmission and Environmental Constraints Using an Augmented Lagrangian Relaxation*”, 1994 IEEE/PES Summer Meeting, San Francisco, CA, USA, 94 SM 572-8 PWRS.
- [78] Wood, A.J., B.F. Wollenberg. “*Power Generation Operation and Control*”, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [79] Zenios, S.A., N. Ç. Pinar and R.S. Dembo. “*A Smooth Penalty Function Algorithm for Network Structured Problems*”, Department of Decisions Sciences, Report 90-12-05, The Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA. 19104. 1990.



## APÈNDIX AP5

### Glossari de símbols.

S'indica la pàgina on es defineix cada símbol:

$A$ : matriu d'incidències nusos-arcos. ....	8
$a(v)_i$ : fita activa associada a la variable $i$ direcció $v$ . ....	70
$a_k^{(i)}$ : aportació natural embassament $k$ interval $i$ . ....	143
$\mathcal{A}$ : conjunt d'índexos d'arcos clau. ....	25
$A_{\mathcal{A}}$ : columnes clau de $A$ . ....	33
$A_c$ : columnes no clau de $A$ . ....	33
$A_{\mathcal{N}}$ : columnes no bàsiques de $A$ . ....	32
$A_{\mathcal{S}}$ : columnes superbàsiques de $A$ . ....	32
$b$ : terme independent constriccions a banda. ....	8
$B$ : matriu bàsica. ....	18
$\mathcal{B}$ : conjunt d'índexos de les variables bàsiques. ....	17
$\mathcal{B}_p$ : índex de la $p$ -èssima variable bàsica. ....	17
$b_{\mathcal{N}}$ : vector de fites actives. ....	19
$\mathcal{C}$ : conjunt d'índexos de variables no clau. ....	25
$\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ : conjunt d'arcos clau presents a cicles $\mathcal{C}$ . ....	37
$\overset{\circ}{c}_{xj}$ : arcs del cicle bàsic de $c_{xj}$ . ....	37
$\overset{\circ}{c}_{xj}^-$ : arcs de $\overset{\circ}{c}_x$ amb orientació inversa. ....	37
$\overset{\circ}{c}_{xj}^+$ : arcs de $\overset{\circ}{c}_x$ amb orientació directa. ....	37
$\overset{\circ}{\mathcal{C}}_p$ : arcs no clau que formen cicle amb l'arc clau $p \in \mathcal{A}$ . ....	65
$c_x$ : nombre d'arcos no clau. ....	33
$\mathcal{C}_x$ : conjunt d'índexos d'arcos no clau. ....	33
$c_z$ : nombre de folgues bàsiques. ....	33
$\mathcal{C}_z$ : conjunt d'índexos de folgues bàsiques. ....	33

$d_k^{(i)}$ : descàrrega embassament $k$ interval $i$ . . . . .	143
$e_i^n$ : vector unitari $i$ -èssim de dimensió $n$ . . . . .	22
$E_i$ : matriu eta associada a la columna $i$ -èssima de $Q$ . . . . .	57
(FLCL): prob. d'opt. de fluxos lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals. . . . .	9
(FN): problema pur d'optimització de fluxos no lineals en xarxes. . . . .	12
(FNCL): prob. d'opt. de fluxos no lineals en xarxes amb constriccions a banda lineals. . . . .	7
$g$ : vector gradient . . . . .	16
$\mathcal{G}$ : graf associat a la matriu $A$ . . . . .	8
$G_j$ : nusos de generació hidràulica. . . . .	160
$g(x)_B$ : vector gradient de les variables bàsiques. . . . .	17
$G_{i,j}$ : matriu de rotació de Givens. . . . .	79
$g(x)_N$ : vector gradient de les variables no bàsiques. . . . .	17
$g(x)_S$ : vector gradient de les variables superbàsiques. . . . .	17
$h_k^{(i)}$ : alçada equivalent. . . . .	145
$H_{Lk}^{(i)}$ : linealització de la generació hidràulica. . . . .	146
$\tilde{H}_z$ : aproximació quasi-Newton de l'Hessià reduït. . . . .	76
$\mathbf{I}_z$ : matriu de constriccions de les folgues. . . . .	8
$\mathbf{I}_c$ : columnes bàsiques de $\mathbf{I}_z$ . . . . .	33
$\mathbf{I}_N$ : columnes no bàsiques de $\mathbf{I}_z$ . . . . .	32
$\mathbf{I}_S$ : columnes superbàsiques de $\mathbf{I}_z$ . . . . .	32
$L_j$ : nusos de càrrega. . . . .	160
$l_c$ : nombre d'arcs clau presents a cicles $\mathcal{C}$ . . . . .	37
$l_j^{(i)}$ : valor previst de la càrrega barra $j$ interval $i$ . . . . .	159
$l_S$ : nombre d'arcs clau presents a cicles $\mathcal{S}$ . . . . .	37
$l_{T_A}$ : nombre d'elements no nuls de $T_A$ . . . . .	40
$l_{T_S}$ : nombre d'elements no nuls de la matriu $T_S$ . . . . .	46
$l_{LU}$ : nombre d'elements no nuls dels factors $LU$ de $Q$ . . . . .	40
$\bar{M}$ : matriu de constriccions actives de (NCL). . . . .	18
$m_q$ : columna de $M$ associada a la variable $y_q$ . . . . .	41
$N_{\bar{M}}$ : espai nul de $\bar{M}$ . . . . .	19
$N$ : matriu no bàsica. . . . .	18
$\tilde{n}$ : nombre d'arcs de la xarxa, amb l'arc arrel inclòs. . . . .	8
$Ng$ : nombre de nusos de generació hidràulica. . . . .	160

---

$Nl$ : nombre de nusos de càrrega. ....	160
$Nt$ : nombre de nusos de transbord de la xarxa de transmissió. ....	160
$Nu$ : nombre d'unitats tèrmiques. ....	160
$Nc$ : nombre de cicles bàsics presents a la xarxa de transmissió. ....	160
<b>(NCL)</b> : problema d'optimització no lineal amb constriccions lineals. ....	16
$\mathcal{N}$ : conjunt d'índexos de les variables no bàsiques. ....	17
$\mathcal{N}_u$ : conjunt d'índexos de les variables no bàsiques a fita superior. ....	17
$\mathcal{N}_0$ : conjunt d'índexos de les variables no bàsiques a fita inferior. ....	17
$\mathcal{N}_p$ : índex de la $p$ -èssima variable no bàsica. ....	17
$\mathcal{N}_x$ : conjunt d'índexos d'arcs no bàsics. ....	32
$\mathcal{N}_z$ : conjunt d'índexos de folgues no bàsiques. ....	32
$P(x_s)$ : projecció de $x_s \in \mathbb{R}^s$ sobre $\Omega_s$ . ....	70
$\bar{p}_{kl}$ : capacitat de la línia de transmissió $(k, l)$ . ....	160
$\bar{P}_j$ : potència màxima unitat tèrmica $j$ . ....	151
$\underline{P}_j$ : potència mínima unitat tèrmica $j$ . ....	151
<b>(POH)</b> : Problema d'Optimització Hidro-Tèrmica a Curt Termini. ....	138
<b>(PPH)</b> : Problema de Planificació Hidro-Tèrmica. ....	138
$Q$ : base de treball. ....	25
$\mathcal{Q}$ : conjunt dels índexos de les var. superbàsiques amb fites quasi-actives. ....	71
$\overset{\circ}{q}$ : arcs del cicle bàsic de $q$ . ....	26
$r$ : injeccions a la xarxa. ....	8
$R$ : factors de Cholesky de $\tilde{H}_z$ . ....	76
$\bar{r}_{Dj}$ : reserva rodant decremental màxima unitat $j$ . ....	151
$\bar{r}_{Ij}$ : reserva rodant incremental màxima unitat $j$ . ....	151
$s$ : nombre de variables superbàsiques. ....	32
$S$ : matriu superbàsica. ....	18
$s_k^{(i)}$ : vessament embassament $k$ interval $i$ . ....	143
$\overset{\circ}{S}$ : conjunt d'arcs clau presents a cicles $\mathcal{S}$ . ....	37
$\overset{\circ}{s}_{x_j}$ : arcs del cicle bàsic de $s_j$ . ....	37
$\overset{\circ}{s}_{x_j}^-$ : arcs de $\overset{\circ}{S}$ amb orientació inversa. ....	37
$\overset{\circ}{s}_{x_j}^+$ : arcs de $\overset{\circ}{S}$ amb orientació directa. ....	37
$\overset{\circ}{S}_p$ : arcs superbàsics que formen cicle amb l'arc clau $p \in \mathcal{A}$ . ....	65
<b>(SN<math>\bar{M}</math>)</b> : subproblema a s'espai nul de $\bar{M}$ . ....	20

$\mathcal{S}$ : conjunt d'índexos de les variables superbàsiques. ....	17
$s_p$ : índex de la p-èsima variable superbàsica. ....	17
$s_x$ : nombre d'arcs superbàsics. ....	32
$\mathcal{S}_x$ : conjunt d'índexos d'arcs superbàsics. ....	32
$s_z$ : nombre de folgues superbàsiques. ....	32
$\mathcal{S}_z$ : conjunt d'índexos de folgues superbàsiques. ....	32
$T$ : matriu de constriccions a banda. ....	8
$\tilde{t}$ : nombre de constriccions a banda de $\leq$ . ....	8
$T_j$ : nusos de transbord de la xarxa de transmissió. ....	160
$T_A$ : columnes clau de $T$ . ....	33
$T_c$ : columnes no clau de $T$ . ....	33
$T_N$ : columnes no bàsiques de $T$ . ....	32
$T_S$ : columnes superbàsiques de $T$ . ....	32
$U_j$ : nusos de generació tèrmica. ....	160
$u_B$ : vector de fites superiors de les variables bàsiques. ....	17
$u_N$ : vector de fites superiors de variables no bàsiques. ....	17
$u_S$ : vector de fites superiors de variables superbàsiques. ....	17
$u_x$ : capacitats dels arcs de la xarxa. ....	8
$u_z$ : fites de les folgues de les constriccions a banda. ....	8
$v_k^{(i)}$ : volum final embassament $k$ interval $i$ . ....	143
$\bar{v}_k$ : volum màxim embassament $k$ . ....	144
$x_{n+1}$ : arc arrel. ....	8
$\mathcal{X}$ : parells $(k, l)$ associats a línies existents a la xarxa de transmissió. ....	160
$\mathcal{X}_j$ : conjunt de parells $(k, l)$ associats al cicle bàsic $j$ -èssim. ....	160
$x_B$ : vector de variables bàsiques. ....	17
$x_H$ : variables hidràuliques. ....	144
$x_N$ : vector de variables no bàsiques. ....	17
$x_M^*$ : punt estacionari de $(\mathbf{SN}\bar{M})$ . ....	20
$x_S$ : vector de variables superbàsiques. ....	17
$\text{XT}^{(i)}$ : xarxa tèrmica interval $i$ . ....	156
$y$ : vector de variables de $(\mathbf{FNCL})$ . ....	31
$Z$ : base de l'espai nul de $\bar{M}$ . ....	19
$\mathcal{Z}$ : conjunt d'índexos de les constriccions a banda de $\leq$ . ....	8

---

$\bar{\alpha}_B$ : passa màxima variables bàsiques. ....	20
$\bar{\alpha}_S$ : passa màxima variables superbàsiques. ....	20
$\epsilon_L$ : error màxim de l'aproximació lineal de la generació hidràulica. ....	166
$\Theta_C$ : matriu de cicles no clau. ....	36
$\Theta_S$ : matriu de cicles superbàsics. ....	36
$\kappa(\cdot)$ : constant $\kappa$ de les funcions $\psi(\cdot)$ . ....	40
$\lambda_k^{(i)}$ : coeficients de la linealització de la generació hidràulica. ....	146
$\mu$ : constant de conversió d'energia mecànica a elèctrica. ....	145
$\pi$ : Aproximació dels multiplicadors de Lagrange $\pi^*$ . ....	21
$\pi^*$ : multiplicadors de Lagrange de les constriccions d'igualtat. ....	21
$\pi_g$ : constant de penalització per vessament indegut. ....	144
$\rho_k^{(i)}$ : eficiència de l'embassament $k$ -èssim. ....	145
$\sigma_N$ : Aproximació dels multiplicadors de Lagrange $\sigma_N^*$ . ....	21
$\sigma_N^*$ : multiplicadors de Lagrange de les fites actives. ....	21
$\psi(\cdot)$ : funció de diferència de costos computacionals. ....	40
$\Omega_{FNCL}$ : conjunt de solucions factibles de <b>(FNCL)</b> ....	31
$\Omega_{NCL}$ : conjunt de solucions factibles de <b>(NCL)</b> ....	16
$\Omega_S$ : conjunt de vectors de $\mathbb{R}^s$ factibles respecte a les fites superbàsiques. ....	70





# APÈNDIX AP6

## Índex de matèries.

- actualització
  - de la base de treball, 27
  - de la matriu  $A_A$ , 29
- alçada equivalent, 145
- algorisme
  - de càlcul de  $Bw = v$  a **(FLCL)**, 26
  - de càlcul de  $w'B = v'$  a **(FLCL)**, 27
  - de resolució de **(NCL)**, 23
  - del conjunt de constriccions actives, 23
  - del símplex, 25
- algorisme  $P^3$ , 58
  - gepa, matrius, 58
  - punxa, columnes, 59
  - gepa externa, 60
  - gepa interna, 60
- arbre generador, 52
- arc arrel, 8
- aritmètica finita, 36, 83
- base de **(FLCL)**, 24
- base de treball, 25
- Bertsekas, 69
- BFGS, 76
- bloqueig, 89
- càrrega, 137
- capacitats dels arcs de la xarxa, 8
- Cholesky, 6
- cicles, 26, 46
  - càlcul, 49
  - cicles no clau ( $\overset{\circ}{C}$ ), 37
  - cicles superbàsics ( $\overset{\circ}{S}$ ), 37
  - matrius de cicles  $\mathcal{B}$  i  $\mathcal{C}$ , 36, 37
  - orientació directa i inversa, 37
- columnes
  - a banda, 9
  - clau, 11, 25, 33
  - no clau, 11, 25, 33
- complement de Schurz, 25
- Condicions d'optimalitat, 21
- conjunt màxim de folgues bàsiques, 93
- constriccions
  - a banda, 8
  - a banda afitades, 8
  - d'emissió, 182
  - de seguretat, 182
- Coordinació Hidro-Tèrmica, 137
- cost computacional, 34, 38, 49
  - algorismes de tractament de  $\Theta$ ., 38
  - algorismes de càlcul de  $B^{-1}v$ , 40–42
  - algorismes de càlcul de  $v'B^{-1}$ , 43, 44
  - algorismes de càlcul de  $Zv$ , 48
  - comparació, 49
- CPLEX, 11, 68
- decentralized level, 183
- degeneració
  - solució degenerada, 17
- descàrrega, 143
- despatxament òptim, 140, 183
- Di2no, 102
- DIMACS, 100, 101
- direccions de cerca, 19
- direccions factibles, 14
- eficiència, 36
- errors de cancel·lació, 36, 46, 51
- espai
  - nul de  $\bar{M}$ ., 19
  - tangent de  $\bar{M}$ ., 19
- estabilitat numèrica, 46
- estructura de **(FNCL)**
  - matriu  $B$ , 33
  - matrius  $N$  i  $S$ , 32
- estructura de dades, 29, 52
- eta
  - esparsitat, 62, 63
  - eta externa, 62
  - eta interna, 62
  - matriu, 57
- Exploració Lineal de Bertsekas, 69
- factorització de Cholesky, 76
- factorització LU, 56
- fase 0, 67
- fase 1, 67

- files a banda, 9
- fita
  - activa, 70
  - constriccions a banda afitades, 8
  - de les folgues de les constriccions a banda, 8
  - dels arcs de la xarxa, 8
  - fites actives, 19
  - fites simples, 69
  - inferior dels arcs, 8
  - quasi-activa, 70
- fluxos lineals inserits, 9
- Forma en Producte de la Inversa (FPI), 57
- formulació
  - del problema **(FNCL)**, 7
  - del problema **(FN)**, 12
  - del problema **(FLCL)**, 9
  - del problema **(NCL)**, 16
- funció
  - cota-volum, 145
  - de penalització quadràtica, 181
- funcions objectiu
  - EIO1, 108
  - Namur, 108
- FXCB, 12, 68
- Givens, 79
- gradient, 16
- gradient conjugat, 73
- gradient reduït, 79
- graf, 8
- Grid-on-Torus, 101, 106
  - models *gotd*, 106
- Gridgen, 101, 104
  - models *ggeb*, 106
  - models *gged*, 106
- Hellerman i Rarick, 58
- Hessenberg, 79
- implementació, 36
- injeccions a la xarxa  $r$ , 8
- Internet, 101
- Karush-Kuhn-Tucker, 21
- Lagrangiana augmentat, 181
- linealitzacions successives, 166
- longitud de pas, 20
- Mètode de Newton Truncat, 73, 100
- Mètode quasi-Newton, 76, 100
- MAPH, 141
- MAPHLI 2.2, 169, 176
- master level, 183
- matriu
  - $Z$ , base de  $N_{\bar{M}}$ , 19, 47
  - $Z$ , càlcul, 47
  - de rotació de Givens, 79
  - matriu  $B$  de **(FNCL)**, 33
  - matriu  $N$  de **(FNCL)**, 32
  - matriu  $S$  de **(FNCL)**, 32
  - bàsica  $B$  de **(NCL)**, 18
  - bàsica de **(FLCL)**, 24
  - d'incidències nusos-arcs  $A$ , 8
  - de cicles no clau ( $\Theta_c$ ), 36, 37
  - de cicles superbàsics ( $\Theta_s$ ), 36, 37
  - de constriccions actives de **(NCL)**, 18
  - de Hessenberg, 79
  - no bàsica  $N$  de **(NCL)**, 18
  - operacions amb  $B$ , 39
  - superbàsica  $S$  de **(NCL)**, 18
- MINOS 5.3, 3, 112
- model acoblat, 141
- model desacoblat, 139
- Multiplicadors de Lagrange
  - aproximació, 21
- multiplicadors de Lagrange, 21, 43, 50
- NETSIDE, 11, 68
- NOXCB 9.0, 3, 95, 112
- operacions matricials, 39
- Optimal Power Flow, 140
- Optimització Hidro-Tèrmica, 137
- out-of-kilter, 11
- passa màxima, 20
- pivotació parcial, 63
- Planificació Hidro-Tèrmica, 138
- problema
  - (FNCL)**, 7
  - (FLCL)**, 9
  - (FN)**, 12
  - (POH)**, 137
  - (PPH)**, 138
  - (NCL)**, 16
  - subproblema a l'espai nul de  $\bar{M}$ , 20, 69
- processador, 35
- pseudo-òptim de classe 1, 91
- pseudo-òptim de classe 2, 91
- quasi-Newton
  - actualització, 76
- Relaxació Lagrangiana, 182
- Relaxació Lagrangiana Augmentada, 183
- reserva rodant, 137
  - decremental, 151
  - hidràulica, 147
  - incremental, 151
- Rmfgen, 101, 104
  - models *rmfa*, 104
  - models *rmfb*, 104
- simplex dual, 81
- sistemes d'equacions lineals, 39
  - resolució, 25
- solució pseudo-factible, 67

subgradient, 183  
 Sun Sparc, 112

variables

- partició a **(FNCL)** , 32, 33
- partició a **(FLCL)**, 25
- partició a **(NCL)**, 17
- bàsiques, 17
- clau, 25, 33
- de **(FNCL)** , 31
- hidràuliques, 144
- no bàsiques, 17

- no clau, 25, 33
- superbàsiques, 17
- vector de predecessors, 52
- vector travessar invers, 52
- vessament, 143

xarxa

- ampliada, 161
- de transmissió, 159
- hidràulica, 143
- replicada, 143
- tèrmica a l'interval  $i$ , 156
- tèrmica equivalent, 153