FIB
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
UPC

Bases de l'estadística
Exemples i exercicis

Bloc C – Probabilitat i Estadística

2024

Índex

Exemple. Nombre de terminals
Exemple. IC amb σ coneguda
Exercici. Mesures en cm
Exemple. Embotelladora
Exercici. Glicèmia
Exemple. Moneda (IC per π)
Exemple. Execucions (IC per σ)
Exemple. Diferència temps mitjà en mostres aparellades
Exercici. Diferència temps mitjà compressors (aparellat)
Exercici. Diferència temps mitjà en mostres independents
Exemple. Monedes (IC comparant π_1 i π_2)
Exemple. Diferència variabilitats (IC comparant σ_1 i σ_2)
Funcions en R per a IC amb exemples

Exemple. Nombre de terminals (estimació puntual assumint m.a.s.)

En 9 dies consecutius s'ha observat el nombre de terminals en una Universitat connectats a internet: 587, 470, 676, 451, 436, 672, 584, 697 i 408 [$\Sigma x_i = 4981$; $\Sigma x_i^2 = 2860855$]

```
X <- c(587,470,676,451,436,672,584,697,408)
```

Una estimació puntual del nombre esperat (μ) de terminals diaris connectats és:

`mean(X)` → $\bar{x} = 553.44$ o $\bar{x} = (\sum x_i)/n = \frac{4981}{9} = 553.44$

Una estimació puntual de la desviació tipus (σ) del nombre de terminals connectats és:

`sd(X)` → $s = 114.0988$ o $s = \sqrt{(2860855 - (4981)^2/9)/(8)} = 114.0988$

L'estimació de l'error tipus o variabilitat de la mitjana és:

`sd(X)/sqrt(length(X))` → $se = 38.03$ $se = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{114.0988}{3} = 38.03$

** Quant valdria l'error tipus (o estàndard error) si el mateix valor de mitjana i de desviació provinguessin de n=100 valors:* $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{114.0988}{10} = 11.4$

Exemple. Nombre de terminals (IC assumint premissa de normalitat)

A partir de la mostra de 9 valors, podem calcular una estimació per interval de μ:

- si suposem que coneixem la desviació poblacional (per exemple σ=100)

$$\bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 553.44 \mp qnorm\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) se = 553.44 \mp qnorm\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \frac{100}{\sqrt{9}}$$

- si suposem que NO coneixem la desviació poblacional, usarem la desviació mostral (s=114.1)

$$\bar{x} \mp t_{8,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 553.44 \mp qt\left(1-\frac{\alpha}{2},8\right) se = 553.44 \mp qt\left(1-\frac{\alpha}{2},8\right) \frac{114.1}{\sqrt{9}}$$

I si ho calculem per confiança del 95% i del 99%:

```
X <- c(587,470,676,451,436,672,584,697,408)
n <- 9
```

1-α	σ	IC(μ,1-α)	Resolució amb R

95%	Coneguda (σ=100)	[488.11; 618.78]	`sigma <- 100`
			`mean(X)- qnorm(0.975)*sigma/sqrt(n)`
			`mean(X)+ qnorm(0.975)*sigma/sqrt(n)`

99%	Coneguda (σ=100)	[467.58 ; 639.31]	`sigma <- 100`
			`mean(X)- qnorm(0.995)*sigma/sqrt(n)`
			`mean(X)+ qnorm(0.995)*sigma/sqrt(n)`

95%	Desconeguda	[465.74; 641.15]	`mean(X)- qt(0.975,n-1)*sd(X)/sqrt(n)` `mean(X)+ qt(0.975,n-1)*sd(X)/sqrt(n)`
99%	Desconeguda	[425.83 ; 681.06]	`mean(X)- qt(0.995,n-1)*sd(X)/sqrt(n)` `mean(X)+ qt(0.995,n-1)*sd(X)/sqrt(n)`

Observeu que, a més confiança (menys risc d'error), la precisió dels IC disminueix (interval més ample).
Els IC amb σ desconeguda són més amples que els equivalents assumint el verdader valor de σ (ja que hi ha més incertesa i usem t-Student enlloc de N(0,1))

Exemple. IC amb σ coneguda (assumint premissa de normalitat)

Una embotelladora d'ampolles de litre té una dispersió de σ = 10cc. En una mostra a l'atzar de n = 100 ampolles d'aquesta màquina, la mitjana observada ha sigut $\bar{x}$ = 995cc.

Un interval de confiança del 95% de μ és:

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 995 \pm 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 995 \pm 1.96 = [993.04\ ,996.96]$$

($z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ -> $z_{0.975}$ -> qnorm(0.975) -> 1.96)

(amb una confiança del 95%, μ es troba entre 993.04 i 996.96, per sota dels 1000cc esperables)

La glicèmia en mmol/L té una desviació típica de σ = 1 en una mostra a l'atzar de n= 9 pacients, la mitjana $\bar{x}$ val 5. Un interval de confiança del 95% de μ és:

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \mp 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = 5 \mp 0.653 = [4.35\ ,5.65]$$

(amb una "força" del 95%, creiem que l'autèntic valor poblacional està entre aquests límits)

Exercici. Mesures en cm (assumint premissa de normalitat)

Es prenen unes mesures en cm, amb una primera m.a.s. y1 de 4 valors: 90, 100, 100, 110
($\Sigma y_1=400$ $\Sigma y_1^2=40200$) (En R: y1 <- c(90,100,100,110))

Donar una estimació puntual per a la mesura mitjana i un IC per aquesta mitjana al 95%:

$\overline{y_1}$ =100 cm ((90+100+100+110) / 4 o $\Sigma y_1 / 4 = 400 / 4$ o mean(y1) en R)

s1= 8.16 cm (sqrt(66.67) = sqrt($(90-100)^2+(100-100)^2+(100-100)^2+(110-100)^2)/3$)

o bé sqrt($(\Sigma y1^2 - (\Sigma y1)^2/4) / 3) = sqrt((40200-400^2/4) / 3)$

IC(μ1, 0.95)= $\bar{y}1 \pm t_{3,1-\alpha/2} \cdot s1/\sqrt{n1} = 100 \pm 3.1824 \cdot 4.0825 = 100 \pm 12.99 = [87.01, 112.99]$

($t_{3,1-\alpha/2}$ -> $t_{3,0.975}$ -> qt(0.975,3) -> 3.1824)

Repetim per una altra m.a.s. y2 de 16 valors: ($\Sigma y_2=1600$ $\Sigma y_2^2=161000$)

(En R: y2 <- c(90,90,90,90,90,100,100,100,100,100,100,110,110,110,110,110))

$\overline{y_2}$=100 cm ($\Sigma y_2 / 16 = 1600 / 16$ o mean(y2) en R)

s2= 8.16 cm (sqrt(66.67) = sqrt($(\Sigma y2^2 - (\Sigma y2)^2/16) / 15) = sqrt((161000-1600^2/16) / 15)$

IC(μ2, 0.95)= $\bar{y}2 \pm t_{15,1-\alpha/2} \cdot s2/\sqrt{n2} = 100 \pm 2.131 \cdot 2.04 = 100 \pm 4.35 = [95.65, 104.35]$

($t_{15,1-\alpha/2}$ -> $t_{15,0.975}$ -> qt(0.975,15) -> 2.131)

** Observeu els IC segons n: si n augmenta la precisió dels IC també augmenta (interval més estret)*

Exemple. Embotelladora (assumint premissa de normalitat)

Una embotelladora d'ampolles de litre té una dispersió de σ = 10cc. En una mostra a l'atzar de n = 100 ampolles d'aquesta màquina, la mitjana observada ha sigut $\bar{x}$ = 995cc.

L'interval de confiança del 95% de μ és:

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 995 \pm 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 995 \pm 1.96 = [993.04\,, 996.96]$$

($z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ -> $z_{0.975}$ -> qnorm(0.975) -> 1.96)

(l'amplada de l'interval és 1.96*2=3.92)

Si volguéssim una amplada de l'interval de 3.5 (meitat de l'interval = 1.75):

quina hauria de ser n sense canviar la confiança?

1.75 = $\mathbf{1.96} \cdot \frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ → n=125.44 (mínim una n de 126)

quin hauria de ser el risc i la confiança sense canviar la n?

1.75 = $\boldsymbol{z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\mathbf{100}}}$ → 1-α/2 = 0.9599 -> α=8% (risc del 8%,confiança del 92%)

Exercici. Glicèmia (assumint premissa de normalitat)

La glicèmia en mmol/L té una desviació típica de σ = 1 en una mostra a l'atzar de n= 9 pacients, la mitjana $\bar{x}$ val 5. L'interval de confiança del 95% de μ és:

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \mp 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = 5 \mp 0.653 = [4.35\,, 5.65]$$

Sense canviar la confiança, **com podríem reduir l'interval a la meitat?**

$$IC(\mu, 0.95) = \bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{0.653}{2} \rightarrow n \approx 36 \rightarrow n\ ha\ de\ ser\ 4\ vegades\ major$$

Calculeu l' **IC amb una confiança del 99%**

$$IC(\mu, 0.99) = \bar{x} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \mp 2.576 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = 5 \mp 0.857 = [4.14\,, 5.86]$$

ATENCIÓ: quan *n* augmenta la precisió dels IC augmenta (interval més estret). Si augmenta la confiança (disminuint el risc *α* d'error), la precisió dels IC disminueix (interval més ample)

ATENCIÓ: En aquest cas, per estimar μ necessitem conèixer σ → *situació molt particular i infreqüent*

Exemple. Moneda (IC per π)

Llencem 100 vegades una moneda a l'aire i observem 56 cares (P = 56/100 = 0.56).

Les dues solucions per l'IC segons com substituïm π per calcular *se*:

$$IC(\pi, 0.95) = P \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P\cdot(1-P)}{n}} = 0.56 \mp 1.96\sqrt{\frac{0.56\cdot 0.44}{100}} \approx 0.56 \mp 0.10 = [0.46, 0.66]$$

$$IC(\pi, 0.95) = P \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi_m\cdot(1-\pi_m)}{n}} = 0.56 \mp 1.96\sqrt{\frac{0.50\cdot 0.50}{100}} \approx 0.56 \mp 0.10 = [0.46, 0.66]$$

($z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ -> $z_{0.975}$ -> qnorm(0.975) -> 1.96)

Donen el mateix IC fins al 2n decimal. El motiu és que la probabilitat estimada (0.56) és molt similar a la probabilitat de màxima indeterminació (0.50)

Es podria contrastar un possible valor del paràmetre (per exemple π=0.50 indicant una moneda equilibrada), amb confiança del 95%: com que el valor 0.50 cau dins l'IC, és versemblant que la moneda sigui equilibrada d'acord amb l'evidència empírica que les dades aporten

Exemple. Execucions (IC per σ) (assumint premissa de normalitat)

En 25 execucions a l'atzar d'un mateix programa s'ha observat una variabilitat $s^2 = 8^2$

$$IC(\sigma^2, 0.95) = \left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right] =$$

($\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ -> $\chi^2_{24,0.975}$ -> qchisq(0.975,24) -> 39.364)

($\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ -> $\chi^2_{24,0.025}$ -> qchisq(0.025,24) -> 12.401)

$$= \left[\frac{8^2(25-1)}{12.401}, \frac{8^2(25-1)}{39.364}\right] = [123.86, 39.02] \rightarrow \textbf{\textit{Oops! M'he equivocat}}$$

$$= \left[\frac{8^2(25-1)}{39.364}, \frac{8^2(25-1)}{12.401}\right] = [39.02, 123.86] \rightarrow \textbf{\textit{Ara sí!}}$$

Resultat:

$$IC(\sigma^2, 0.95) = [39.02, 123.86]$$

$$IC(\sigma, 0.95) = [6.25, 11.13]$$

Fent l'arrel quadrada, obtenim un interval per σ

Exemple. Diferència temps mitjà en mostres aparellades

En 6 bancs de dades s'ha obtingut els temps de 2 programes. Es desitja saber si B millora A, estimant l'efecte diferencial en mitjana (assumint m.a.s. i normalitat)

							Mean	Variances	Var. "pooled"
A	23.05	39.06	21.72	24.47	28.56	27.58	**27.41**	**39.42**	**42.03**
B	20.91	37.21	19.29	19.95	25.32	24.07	**24.46**	**44.63**	

SOLUCIÓ INCORRECTA: tractar com a dades de mostres independents

(Var "pooled" $s^2 = \frac{5 \cdot 39.42 + 5 \cdot 44.63}{5+5} = 42.03$ i s pooled $\sqrt{42.02}$=6.48)

$$\hat{t} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(27.41 - 24.46)}{6.48\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} = \frac{2.95}{3.74} = 0.79 \qquad IC(\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}, \mathbf{0.95}) = (\mathbf{2.95}) \pm \boldsymbol{t}_{\mathbf{10,0.975}}\, \mathbf{3.74}$$

SOLUCIÓ CORRECTA: tractar com a dades de mostres aparellades

El mètode comença per calcular la diferencia D (A-B) per cada parella (i assumint normalitat):

							Mean	Variances
D = A-B	2.14	1.85	2.43	4.52	3.24	3.51	**2.95**	**0.9998**

$$\bar{\boldsymbol{d}} = \mathbf{2.95} \qquad \boldsymbol{s_D} = \sqrt{\mathbf{0.9998}} = \mathbf{0.9999} \qquad \boldsymbol{se} = \frac{\boldsymbol{s_D}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{\mathbf{0.9999}}{\sqrt{\mathbf{6}}} = \mathbf{0.41} \qquad t = \frac{2.95}{0.41} = 7.2$$

$$\boldsymbol{IC}(\boldsymbol{\mu_D}, \mathbf{0.95}) = \bar{d} \pm \boldsymbol{t}_{\mathbf{5,0.975}} \cdot se = \bar{d} \pm qt(0.975,5) \cdot se = [2.95 \pm 2{,}571 \cdot 0.41] = [\mathbf{1.9}, \mathbf{4.0}]$$

Conclusió: En mitjana A triga 2.95 unitats de temps més. B millora A, trigant entre 1.9 i 4 unitats de temps menys, amb una confiança del 95%

Exemple. Diferència temps mitjà en mostres aparellades

Comparació entre el resultat aparellat (correcte) i per mostres independents (incorrecte):

- Numerador: La **mitjana de les diferencies** (2.95) coincideix amb la **diferència de les mitjanes**. Per tant, el numerador és el mateix en les 2 solucions
- Denominador: La **variància de les diferències** (0.9998) és molt inferior a la "pooled" (42.03), donat que les diferències entre les unitats (s'espera que alguns bancs de dades siguin més 'durs' que altres) han desaparegut al comparar el rendiments dels 2 programes "dins" de cada banc de dades
- Encara que el numerador (senyal) és el mateix, el **denominador** (soroll) **és molt inferior en la solució aparellada**
- Recorda: **el control de les condicions** (en aquest cas, la variabilitat dels bancs de dades) **augmenta l'eficiència** per trobar diferències

IC i estadístic:

- Càlcul de l'estadístic $t = \frac{(\bar{d}-\theta_0)}{se} \sim t_{n-1}$ $\qquad t = \frac{(2.95-0)}{0.41} = 7.2$
- L'estadístic avaluat per un valor de 0 pel paràmetre ($\mu_D = \mu_0 = 0$ indicant una diferència nul·la) dona un valor de 7.2, que en la distribució t_5 (95% entre -2.57 i 2.57) seria un valor extrem; per tant és **poc versemblant que no hi hagi diferència** en mitjana entre els programes A i B i l'**IC quantifica la diferència** (entre 1.9 i 4 unitats)

Exercici. Diferència temps mitjà compressors (aparellat)

En 9 fitxers la diferència D entre els temps d'execució de dos programes de compressió de fitxers ha estat de mitjana 6.71 i desviació 6.00. Assumint m.a.s. i que D ~ N, per saber si triguen el mateix, podem quantificar per IC la diferència mitjana de temps, i plantejar-se si és raonable pensar que els dos compressors tarden el mateix en mitjana

Estadístic: $\hat{t} = (\bar{d} - \mu)/(s/\sqrt{n}) = \frac{6.71-0}{6/\sqrt{9}} = 3.355$

IC(μ, 0.95): $\bar{x} \mp t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 6.71 \mp 2.306 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}} = [2.1\ , 11.3]$

Un dels programes triga en mitjana entre 2.1 i 11.3 unitats de temps més, amb una confiança del 95%. Per tant, no triguen el mateix

Si ens plantegem saber si és raonable pensar que els dos compressors tarden el mateix en mitjana, podríem contrastar si és versemblant una diferència nul·la de les mitjanes poblacionals (μ_D=0=μ_1-μ_2 o bé μ_1=μ_2), amb confiança 95%: com que el valor 0 no pertany al IC, no és versemblant la igualtat de mitjanes poblacionals d'acord amb l'evidència empírica que les dades aporten

Exercici. Diferència temps mitjà en mostres independents

Els temps mitjans d'execució de dos programes provats en diferents bancs de dades independents (n_1=50 i n_2=100) són: $\bar{y}_1 = 24$ *i* $\bar{y}_2 = 21$ amb s_1= 8 i s_2= 6. Assumint m.a.s. i normalitat, i suposant igualtat de variàncies ($\sigma^2_1 = \sigma^2_2$), es desitja estimar si tenen rendiments diferents

Var pooled $s^2 = \frac{(n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{(50-1)\cdot s_1^2+(100-1)\cdot s_2^2}{(50-1)+(100-1)} = 45.27$ Desviació pooled s=sqrt$(45.27) = 6.72$

Estàndard error se$= 6.72\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{100}} = 1.16$

Estadístic $\hat{t} = \frac{(\bar{y}_1-\bar{y}_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{3}{1.16} = 2.59$

$$\boldsymbol{IC(\mu_1-\mu_2, 95\%)} = (\bar{y}_1-\bar{y}_2) \pm t_{148,0.975}\cdot se = 3 \pm 1.976\cdot 1.16 = [\mathbf{0.7}, \mathbf{5.3}]$$

(amb `qt(0.975,148)`=1.976 o bé aproximant amb `qnorm(0.975)`=1.96 per ser n prou gran)

El programa "2" triga en mitjana entre 0.7 i 5.3 segons menys amb una confiança del 95%

Si es contrasta una diferència nul·la de les mitjanes poblacionals (μ_1-μ_2=0 o bé μ_1=μ_2), amb confiança 95%: com que el valor 0 no pertany al IC, no és versemblant la igualtat de mitjanes poblacionals d'acord amb l'evidència empírica que les dades aporten.

Exemple. Monedes (IC comparant π_1 i π_2)

Llencem 100 vegades 2 monedes a l'aire i observem 56 i 51 cares respectivament:

P1=56/100= 0.56 i P2=51/100= 0.51

Calculem un IC per a la diferència π_1-π_2

$$\text{se} = \sqrt{(0.56 * 0.44/100) + (0.51 * 0.49/100)} = 0.07$$

$$\boldsymbol{IC}(\boldsymbol{\pi_1 - \pi_2, 95\%}) = (P1 - P2) \pm z_{0.975} \cdot se =$$

$$= (0.56\text{-}0.51) \pm qnorm(0.975)\ 0.07$$

$$= 0.05 \pm 0.137$$

$$= \boldsymbol{[-0.1\ ,\ 0.19]}$$

La diferència de proporcions és de fins a 0.1 punts a favor d'una moneda o de fins a 0.19 punts a favor de l'altra, amb una confiança del 95%. Per tant, la proporció de cares de les dues monedes no es diferencien (clarament o "significativament")

Exemple. Diferència variabilitats (IC comparant σ_1 i σ_2)

Estem interessats en comparar la duració dels recanvis dels cartutxos de tinta de dos marques **A** y **B**) Hem comprovat que la marca B té una mitjana major de duració que la marca A. Però sospitem que la variabilitat pot ser diferent. En dues mostres, hem obtingut els següents resultats:

A	$\bar{y}_A = 366$	s_A=8	s_A^2=64	$n_A = 8$
B	$\bar{y}_B = 406$	s_B=12	s_B^2=144	$n_B = 6$

$$IC(\sigma^2{}_B/\sigma^2{}_A, 95\%) = \left[\frac{\frac{s_B^2}{s_A^2}}{F_{(5,7),0.975}} , \frac{\frac{s_B^2}{s_A^2}}{F_{(5,7)0.025}} \right] = \left[\frac{\frac{144}{64}}{qf(0.975,5,7)} , \frac{\frac{144}{64}}{qf(0.025,5,7)} \right] = \left[\frac{\frac{144}{64}}{5.2852} , \frac{\frac{144}{64}}{0.1459} \right]$$

$$IC(\sigma^2{}_B/\sigma^2{}_A, 95\%) = [0.426 , 15.42]$$

Si es contrasta un valor de 1 pel rati de variàncies (indicant $\sigma^2_B/\sigma^2_A=1$ o bé $\sigma^2_B=\sigma^2_A$), amb confiança del 95%: com que el valor 1 pertany al IC, és versemblant la igualtat de variàncies poblacionals d'acord amb l'evidència empírica que les dades aporten.

Conclusió: No hem trobat evidència per contradir que les variàncies poblacionals siguin iguals

Funcions en R per a IC

Comprovar la premissa de normalitat: *(a Anàlisis gràfica de la normalitat, annex de Bloc B)*

```
qqnorm(X)
qqline(X)
```

app

IC de μ amb σ coneguda (per aquesta funció cal la llibreria BSDA):

```
library(BSDA)
z.test(X,sigma.x=  )        # per a una mostra amb un valor conegut per a la sigma
```

IC de μ (o μ's) amb σ (o σ's) desconeguda:

```
t.test(X)                                   # per a una mostra
t.test(X-Y) o t.test(X,Y,paired=T)  # per a dues mostres aparellades
t.test(X,Y,var.equal=T)  # per a dues mostres independents amb variàncies iguals
t.test(X,Y,var.equal=F)  # per a dues mostres independents amb variàncies diferents
```

IC del rati de σ^2's en dues mostres independents:

```
var.test(X,Y)
```

IC de π:

`prop.test` (mostres grans) i `binom.test` (mostres petites)

Ex. de transparència 4 amb funcions específiques de R

```
X <- c(587,470,676,451,436,672,584,697,408)
```

1-α	σ	IC(μ,1-α) amb fórmules	Resolució amb funcions de R

95%	Coneguda (σ=100)	[488.11; 618.78]	`> z.test(X,sigma.x=100)`
			`z = 16.603, p-value < 2.2e-16`
			`alternative hypothesis: true mean is not equal to 0`
			`95 percent confidence interval:`
			`488.1123 618.7766`
			`sample estimates: mean of x 553.4444`

99%	Coneguda (σ=100)	[467.58 ; 639.31]	`> z.test(X,sigma.x=100,conf.level=0.99)`
			`z = 16.603, p-value < 2.2e-16`
			`alternative hypothesis: true mean is not equal to 0`
			`99 percent confidence interval:`
			`467.5835 639.3054`
			`sample estimates: mean of x 553.4444`

95%	Desconeguda	[465.74; 641.15]	`> t.test(X)`
			`t = 14.552, df = 8, p-value = 4.874e-07`
			`alternative hypothesis: true mean is not equal to 0`
			`95 percent confidence interval:`
			`465.7404 641.1485`
			`sample estimates: mean of x 553.4444`

99%	Desconeguda	[425.83 ; 681.06]	`> t.test(X,conf.level=0.99)`
			`t = 14.552, df = 8, p-value = 4.874e-07`
			`alternative hypothesis: true mean is not equal to 0`
			`99 percent confidence interval:`
			`425.8293 681.0596`
			`sample estimates: mean of x 553.4444`

En els 4 casos veiem un valor "alt" de l'estadístic (***z*** o ***t***) que en la distribució corresponent (N(0,1) o t_8) no és un valor central sinó extrem (amb p-value "petit") indicant que **no és versemblant** el valor a prova, que per defecte és 0

Exemple d'una mostra. IC de μ

Exemple de 9 valors amb positius i negatius (mesures per sota o sobre un llindar)

```
X <- c(-4,-2,-1,0,0,4,8,8,9)   # mean=2.4 sd=4.9 Assumim normalitat (o qqnorm(X) i qqline(X))
library(BSDA)
z.test(X,sigma.x=4)            # IC suposant una σ poblacional de 4
```

```
z = 1.8333, p-value = 0.06675
  alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
  95 percent confidence interval:
   -0.1688409  5.0577298
  sample estimates: mean of x  2.444444
```

```
t.test(X)                      # IC si no coneixem el valor poblacional de σ sinó que usem la s mostral
```

```
t = 1.496, df = 8, p-value = 0.173
  alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
  95 percent confidence interval:
   -1.323423  6.212312
  sample estimates: mean of x  2.444444
```

Es pot comprovar la coincidència dels límits dels IC amb els que es calcularien amb les fórmules

Apart dels IC, aquestes funcions en R ofereixen el resultat d'un p-value : probabilitat que indica si l'estadístic (z o t) usat per calcular l'IC, i avaluat en un valor a prova del paràmetre, és "extrem" o no en la distribució del model de referència (*veure més a l'annex i a bloc D amb més funcions que proporcionen p-values)*

Exemple de dues mostres independents. IC de μ_1-μ_2

Exemple de 2 mostres on comparar μ_1 i μ_2 amb l'IC de l'efecte diferencial (μ_1-μ_2)

```
X1 <-c(1,2,3,5,6,6,7,7,8,8,9)
```
mean=5.6 sd=2.62 Assumim normalitat (o qqnorm(X1) i qqline(X1))

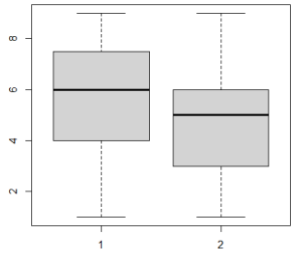
```
X2 <-c(1,1,3,4,5,5,6,7,9)
```
mean=4.5 sd=2.65 Assumim normalitat (o qqnorm(X2) i qqline(X2))

(per exemple X1 i X2 dues mostres de notes amb variabilitat equivalent)

```
t.test(X1,X2,var.equal=T)
```

```
t = 0.91335, df = 18, p-value = 0.3731
  alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
  95 percent confidence interval:
   -1.405312  3.566928
  sample estimates: mean of x mean of y  5.636364  4.555556
```

```
boxplot(X1,X2)
```



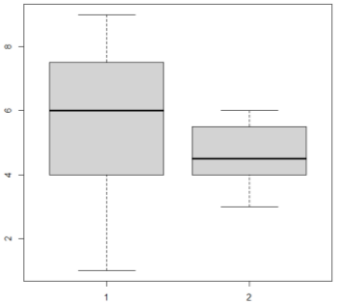
```
X3 <-c(3,4,4,4.5,4.5,5,6,6)
```
mean=4.6 sd=1.0 Assumim normalitat (o qqnorm(X3) i qqline(X3))

(per exemple X1 i X3 dues mostres de notes amb variabilitat no equivalents)

```
t.test(X1,X3,var.equal=F)
```

```
t = 1.1641, df = 13.793, p-value = 0.2641
  alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  -0.8546781  2.8774054
  sample estimates: mean of x mean of y  5.636364  4.625000
```

```
boxplot(X1,X3)
```



Interpretació: la diferència de mitjanes és de fins a 0.85 punts a favor del grup 3 o de fins a 2.9 punts a favor del grup 1, amb una confiança del 95%. Les notes 1 i 3 no es diferencien (clarament o "significativament") en mitjana

Exemple de dues mostres aparellades. IC de μ_D

Exemple de 2 mostres on comparar μ_1 i μ_2 amb l'IC de l'efecte diferencial (μ_1-μ_2)

```
Y1 <- c(1,1,2,2.0,2,2.5,4,5,5.5,6,7.5,8,8,9.5,9,9.5)
Y2 <- c(1.5,1,2,1.0,3,3,3.5,5,6,6,8.5,8.5,9.5,8.5,9.1,9)
```

(per exemple X1 i X2 dues mostres de notes d'uns mateixos estudiants)

```
t.test(Y1,Y2,paired=T)
```

```
t = -0.92936, df = 15, p-value = 0.3674
  alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
  95 percent confidence interval:
   -0.5351864  0.2101864
  sample estimates: mean of the differences  -0.1625
```

En mostres aparellades, és pot treballar amb la diferència dels valors (D=Y1-Y2). Per tant és com el cas d'una mostra on enlloc de μ_1-μ_2 interessa μ_D (i equivaldria a fer `t.test(D)`)

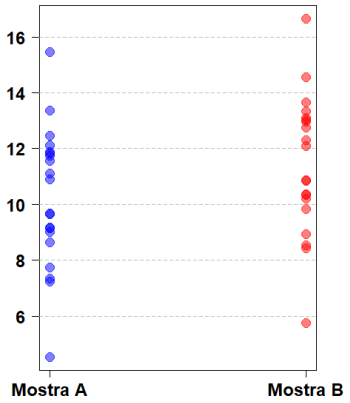
```
D <- Y1-Y2
 -0.5  0.0  0.0  1.0 -1.0 -0.5  0.5  0.0 -0.5  0.0 -1.0 -0.5 -1.5  1.0 -0.1  0.5
mean(D)
  -0.1625
sd(D)
  0.6994045
```

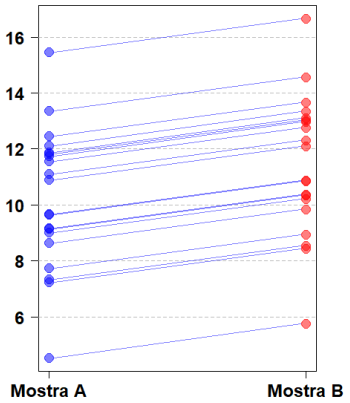
Exemple: no tractar aparellat com a idependent

És molt important no fer una anàlisi de dades aparellades com a dades independents

Aparentment, en el gràfic de l'esquerra (independer no veiem que pugui existir diferències en mitjana entre les dues poblacions

En el gràfic de la dreta (aparellat) es veu clarament que la mitjana és superior en la mostra B.

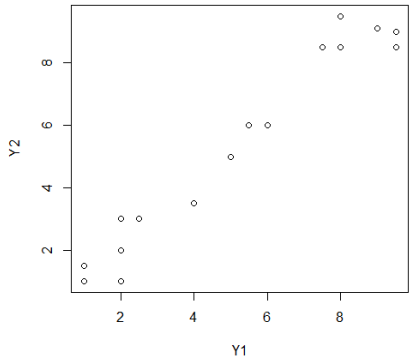




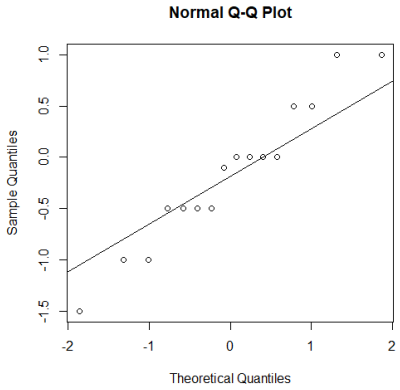
app

En mostres aparellades, podem veure la relació entre les dues mostres (gràfic esquerra) **i la normalitat de la diferència** (gràfic dreta), amb funcions R de descriptiva gràfica:

```
plot(Y1,Y2)
```




```
qqnorm(Y1-Y2)
qqline(Y1-Y2)
```



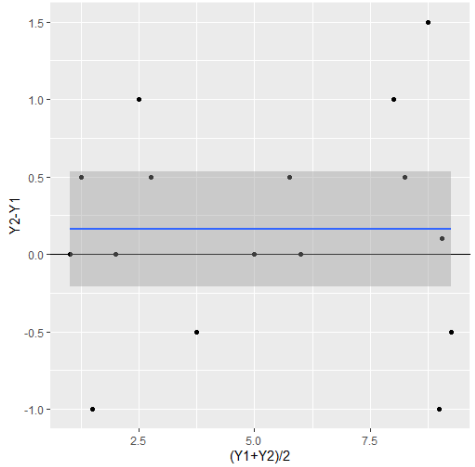
Però convé **relacionar les diferències amb les mitjanes** (com en el següent gràfic Bland-Altman)

Exemple de gràfic *diferències vs mitjanes* (aparellades)

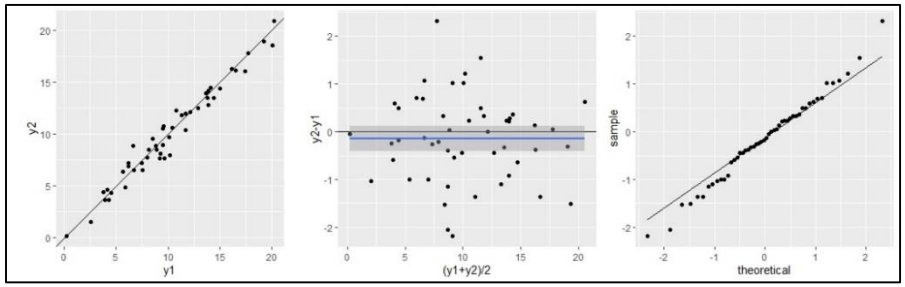
Hi ha funcions R específiques per mostres aparellades: **gràfic de Bland-Altman (BA),** que representa les diferències de les respostes per cada individu en funció de les seves mitjanes

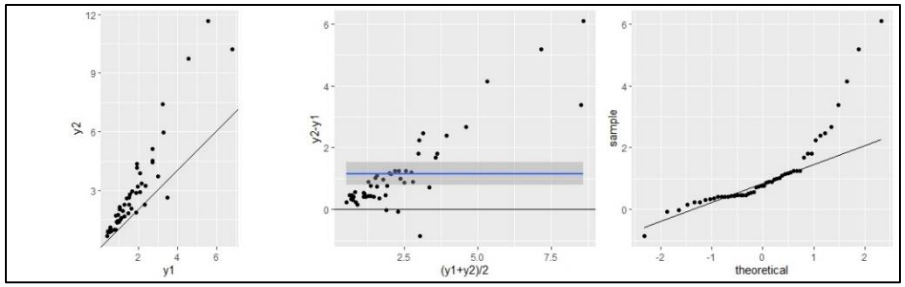
```
install.packages("PairedData")
library(PairedData)
p <- paired(Y1,Y2)
plot(p,type='BA')
```

(o bé `plot((Y1+Y2)/2,Y2-Y1)`)



El gràfic diferències en front de mitjanes (complementant el plot i el qqnorm) permet veure si hi ha efecte additiu (o multiplicatiu), i decidir si convindria una transformació a les dades (es veurà al bloc D)





Exemple de funcions R per comparar dues σ^2

Exemple de 2 mostres on comparar σ_1 i σ_2 amb l'IC de l'efecte diferencial (σ^2_1/σ^2_2)

(com transparència 16 de comparar la variabilitat en la duració dels recanvis dels cartutxos de tinta de dues marques)

```
A <- c(350,361.9,365,365,365,370,372,377)
```

mean(A)=365.7375 sd(A)=8.00231 var(A)=64.03696 Assumim normalitat (o qqnorm(A i qqline(A))

```
B <- c(390,391.7,410,412,414,418)
```

mean(B)=405.95 sd(B)=12.00396 var(B)=144.095 Assumim normalitat (o qqnorm(B) i qqline(B))

```
var.test(B,A)
```

```
F test to compare two variances
data:  B and A
F = 2.2502, num df = 5, denom df = 7, p-value = 0.3199
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
  0.4257491 15.4206862
sample estimates:
ratio of variances
          2.250185
```

Exemple de funcions R per a π

Exemple de llençar 100 vegades una moneda i observar 56 cares

```
prop.test(56,100)
```

```
 1-sample proportions test with continuity correction
data:  56 out of 100, null probability 0.5
X-squared = 1.21, df = 1, p-value = 0.2713
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4573588 0.6579781
sample estimates:  p   0.56
```

```
binom.test(56,100) # més apropiat si la mostra és petita
```

```
 Exact binomial test
data:  56 and 100
number of successes = 56, number of trials = 100, p-value = 0.2713
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4571875 0.6591640
sample estimates:
probability of success
                  0.56
```

Cap d'aquests IC coincideix *exactament* amb el calculat amb la fórmula aproximant a la Normal explicada anteriorment. La coincidència augmentaria amb grandàries mostrals majors i amb proporcions més properes a ½.